Matematyka

Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zostały opracowane na dwóch poziomach:

- podstawowym – *Arkusz I* (MMA-P1_1P-102)
- rozszerzonym – *Arkusz II* (MMA-R1_1P-102)

Arkusz I zawierał 34 zadania, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych. Zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 170 minut.
Arkusz II zawierał 11 zadań otwartych, zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 180 minut.
Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Tematyka zadań egzaminacyjnych obejmowała treści podstawy programowej. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.
Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.

Analiza jakościowa

Arkusz I

Zadania zamknięte

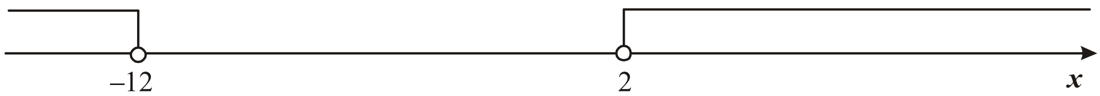
O wysokim odsetku sukcesów na egzaminie maturalnym na poziomie podstawowym zadecydowały głównie zadania zamknięte. Tylko jedno spośród nich okazało się dla ogółu zdających trudne. Było to zadanie 13, odnoszące się do wiadomości dotyczących liczby przekątnych w wielokącie. Jest to zaskakujące nie tyko dlatego, że ten problem łatwo rozwiązać, wykonując odpowiedni rysunek, ale i dlatego, że zadania wykorzystujące tę informację pojawiały się we wcześniej publikowanych arkuszach egzaminacyjnych. W grupie zadań umiarkowanie trudnych znalazły się zadania 1, 8, 10, 15, 17, 19 i 22. Szczególnie zaskakujące są problemy zdających z wyznaczeniem wierzchołka paraboli (zad. 8). Zdający mieli przecież do dyspozycji *Wybrane wzory matematyczne*, w których podane są wzory pozwalające obliczyć współrzędne p i q wierzchołka paraboli. Podobnie w zadaniu 22 zdający mogli skorzystać bezpośrednio ze wzoru na długość odcinka AB.

Pozostałe zadania były dla zdających łatwe (2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23, 24) a nawet bardzo łatwe (3, 5, 18 i 25). Tradycyjnie najłatwiejsze okazały się zadania odnoszące do wykorzystania elementarnych definicji i twierdzeń: pojęcia średniej arytmetycznej (zad. 25) i definicji potęgi o wykładniku 0 (zad. 3).

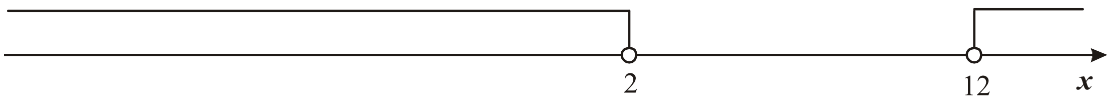
Zadanie 1. ***(1 pkt)***

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$.

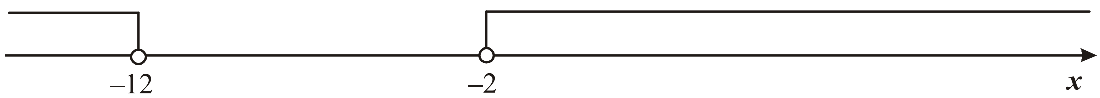
A.



B.



C.



D.

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\|x-a\|>b$ (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,66	0,74	0,51	0,56
Poprawna odpowiedź: C.			

Zadanie 2. ***(1 pkt)***
Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł **B.** 180 zł **C.** 294 zł **D.** 420 zł

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie obliczeń procentowych w sytuacji praktycznej (standard III).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,74	0,81	0,53	0,67
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 3. ***(1 pkt)***
Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa

A. 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 36

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie definicji potęgi o wykładniku zero (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,94	0,97	0,88	0,92
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 4. ***(1 pkt)***
Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\log_4 6$ **D.** $\log_4 10$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie sumy logarytmów (standard IV).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,70	0,80	0,52	0,59
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy

A. $5x^2 + 12x - 3$ **C.** $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$

B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$ **D.** $4x^3 + 12x^2 - 3$

Sprawdzane umiejętności Dodawanie wielomianów (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,90	0,95	0,81	0,87
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 6. ***(1 pkt)***

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest

A. 1 **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** 7

Sprawdzane umiejętności Sprawdzenie, czy liczba jest rozwiązaniem równania (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,81	0,88	0,64	0,72
Poprawna odpowiedź: D.			

Zadanie 7. ***(1 pkt)***

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba

A. 9 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 1

Sprawdzane umiejętności Sprawdzenie, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,89	0,93	0,79	0,86
Poprawna odpowiedź: D.			

Zadanie 8. ***(1 pkt)***

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-3x^2+3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

A. $(3,0)$ **B.** $(0,3)$ **C.** $(-3,0)$ **D.** $(0,-3)$

Sprawdzane umiejętności Odczytanie z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,66	0,73	0,49	0,58
Poprawna odpowiedź: B.			

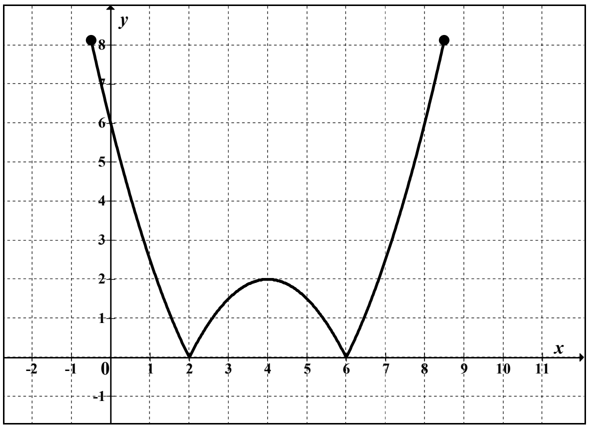
Zadanie 9. ***(1 pkt)***

Prosta o równaniu $y=-2x+(3m+3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0,2)$. Wtedy

A. $m=-\frac{2}{3}$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=\frac{5}{3}$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,76	0,85	0,60	0,67
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 10. ***(1 pkt)***
Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

A. $f(x) = 0$ **B.** $f(x) = 1$ **C.** $f(x) = 2$ **D.** $f(x) = 3$

Sprawdzane umiejętności Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,69	0,76	0,54	0,62
Poprawna odpowiedź: C.			

Zadanie 11. ***(1 pkt)***
W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. 13 **B.** 0 **C.** -13 **D.** -26

Sprawdzane umiejętności Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,87	0,90	0,77	0,85
Poprawna odpowiedź: C.			

Zadanie 12. ***(1 pkt)***
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. 8 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Sprawdzane umiejętności Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,79	0,86	0,62	0,72
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 13. ***(1 pkt)***
Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa

A. 7 **B.** 14 **C.** 21 **D.** 28

Sprawdzane umiejętności Obliczenie liczby przekątnych wielokąta (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,48	0,53	0,42	0,43
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 14. ***(1 pkt)***
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ jest równa

A. $\frac{25}{16}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{17}{16}$ **D.** $\frac{31}{16}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,73	0,82	0,53	0,64
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 15. ***(1 pkt)***
Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 8 **D.** 4

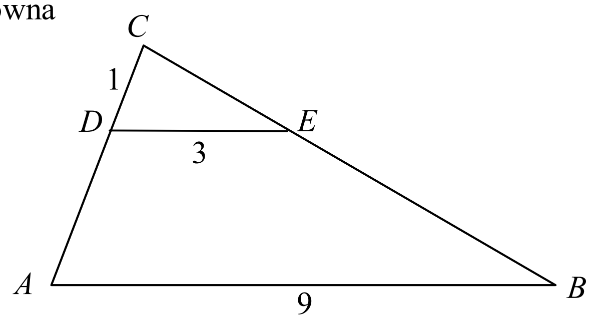
Sprawdzane umiejętności Obliczenie długość boku kwadratu wpisanego w okrąg (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,64	0,71	0,46	0,57
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość

A. 3 **B.** 4 **C.** $\sqrt{34}$ **D.** $\sqrt{61}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokość trójkąta równoramiennego (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,86	0,91	0,74	0,82
Poprawna odpowiedź: B.			

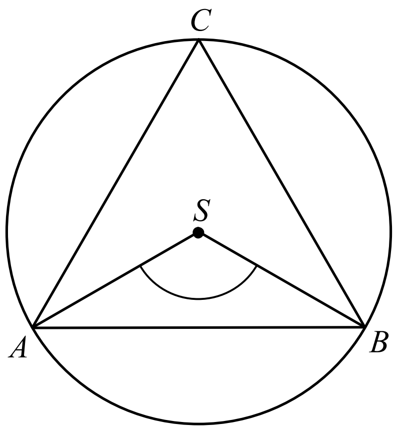
Zadanie 17. ***(1 pkt)***
Odcinki *AB* i *DE* są równoległe. Długości odcinków *CD*, *DE* i *AB* są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka *AD* jest równa



A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,52	0,61	0,33	0,42
Poprawna odpowiedź: A.			

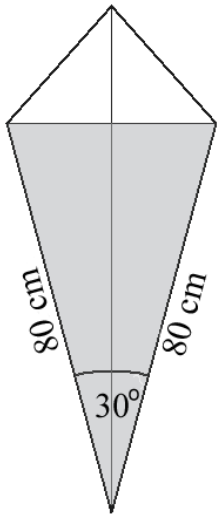
Zadanie 18. ***(1 pkt)***
Punkty *A*, *B*, *C* leżące na okręgu o środku *S* są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego *ASB* jest równa



A. 120° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 30°

Sprawdzane umiejętności Obliczenie miary kąta środkowego (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,90	0,93	0,78	0,88
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 19. ***(1 pkt)***



Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa

A. $3200\ \text{cm}^2$

B. $6400\ \text{cm}^2$

C. $1600\ \text{cm}^2$

D. $800\ \text{cm}^2$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie pole trójkąta (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,55	0,61	0,41	0,48
Poprawna odpowiedź: C.			

Zadanie 20. ***(1 pkt)***
Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Sprawdzane umiejętności Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,74	0,82	0,56	0,66
Poprawna odpowiedź: B.			

Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2 + y^2 = 3$ **B.** $x^2 + y^2 = 6$ **C.** $x^2 + y^2 = 12$ **D.** $x^2 + y^2 = 36$

Sprawdzane umiejętności Wskazanie równanie okręgu o podanym promieniu (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,84	0,91	0,71	0,77
Poprawna odpowiedź: D.			

Zadanie 22. ***(1 pkt)***
Punkty $A=(-5,2)$ i $B=(3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy

A. 30 **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $12\sqrt{5}$ **D.** 36

Sprawdzane umiejętności Obliczenie odległości dwóch punktów na płaszczyźnie (standard II).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,64	0,71	0,46	0,56
Poprawna odpowiedź: C.			

Zadanie 23. ***(1 pkt)***
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5\times3\times4$ jest równe

A. 94 **B.** 60 **C.** 47 **D.** 20

Sprawdzane umiejętności Obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,82	0,88	0,68	0,76
Poprawna odpowiedź: A.			

Zadanie 24. ***(1 pkt)***
Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11 **B.** 18 **C.** 27 **D.** 34

Sprawdzane umiejętności Obliczenie liczby krawędzi ostrosłupa (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,70	0,77	0,53	0,63
Poprawna odpowiedź: D.			

Zadanie 25. ***(1 pkt)***
Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy

A. $x=2$ **B.** $x=3$ **C.** $x=4$ **D.** $x=5$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie średniej arytmetycznej (standard I).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,94	0,96	0,88	0,93
Poprawna odpowiedź: D.			

Zadnia otwarte

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \le 0$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,59	0,69	0,39	0,47

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

- gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $\left|x - \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

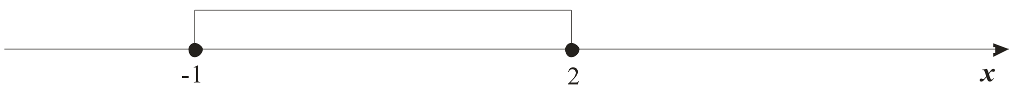
Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-1 \le x \le 2$ lub $\langle -1, 2\rangle$ lub $x \in \langle -1, 2\rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi i odczytujemy rozwiązanie nierówności: $-1 \le x \le 2$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność: rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Mimo iż ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie CKE i OKE), to zdający nadal popełniali błędy:

- obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego, np. $\Delta = -1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 7$
- podając jego pierwiastki, np. $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

lub

- zapisując zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej, np. $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ albo $x \in (-1, 2)$.

Pojawiały się również rozwiązania świadczące o braku podstawowych wiadomości i umiejętności nie tylko z zakresu funkcji kwadratowej, np.
$x^2 - x - 2 \le 0$
$x^2 - x \le 2$
$x \le 2$.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***
Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązywanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,60	0,71	0,41	0,48

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:
- pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $x\left(x^2-4\right)-7\left(x^2-4\right)=0$ lub $x^2\left(x-7\right)-4\left(x-7\right)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo
- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x-2)$ (albo $\left(x+2\right)$ albo $\left(x-7\right)$) i otrzyma poprawny iloraz i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo
- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez trójmian np. $\left(x-2\right)\left(x-7\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

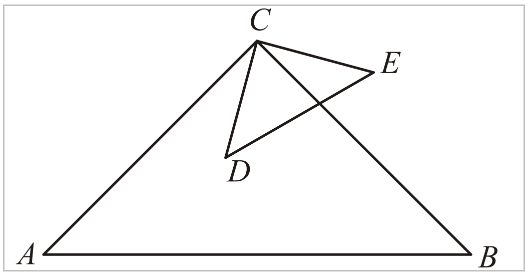
Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów: $x^2\left(x-7\right)-4\left(x-7\right)=\left(x^2-4\right)\left(x-7\right)$,
a następnie rozwiązujemy równanie:
$\left(x-7\right)\left(x^2-4\right)=0$
$\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x-7\right)=0$
Stąd $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem w tym arkuszu.
Rozwiązywanie równania wielomianowego było kolejną z umiejętności badanych na egzaminie maturalnym także w poprzednich latach. Najczęściej popełniane błędy w tym zadaniu były wynikiem:
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2\left(x-7\right)-4\left(x+7\right)=0$
- niewłaściwego rozkładu na czynniki, np. $x\left(x^2-7x-4+28\right)=0$

lub
- niepoprawnego rozwiązania równania kwadratowego, np. $x^2-4=0$: $x=2$.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



<table>
<tr><td colspan="4">Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</th><th colspan="3">Wskaźnik łatwości zadania</th></tr>
<tr><th>LO</th><th>LP</th><th>T</th></tr>
<tr><td>0,08</td><td>0,12</td><td>0,01</td><td>0,03</td></tr>
</table>

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy
- napisze, że trójkąty ACD i BCE są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD| = |BE|$

albo
- zapisze, że $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy uzasadni, że trójkąty ACD i BCE są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD| = |BE|$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Dorysowujemy odcinki AD i BE.
Trójkąty ACD i BCE są przystające na podstawie cechy *bkb*:
- $|AC| = |BC|$, bo trójkąt ABC jest równoramienny
- $|CD| = |CE|$, bo trójkąt CDE jest równoramienny
- $|\sphericalangle ACD| = 90° - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$.

Zatem $|AD| = |BE|$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne i jednocześnie było dla nich najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.
Ponad 30% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, chociaż problem, z którym mieli się uporać, był typowy. Kolejny raz okazało się, że rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów trudne, niezależnie od stopnia złożoności rozumowania, które powinni przeprowadzić. Często zdający błędnie zakładali współliniowość punktów A, D, E lub korzystali z tezy zadania, zakładając przystawanie trójkątów ACD i BCE na podstawie cechy *bbb*. W wielu pracach zdający uzasadniali równość odcinków AD i BE, odwołując się do podobieństwa (bez podania uzasadnienia), a nie przystawania trójkątów, albo powoływali się na cechę przystawania *bkb*, bez uzasadnienia równości kątów ACD i BCE.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

<table>
<tr><td colspan="4">Sprawdzane umiejętności
Obliczenie wartości jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego z wykorzystaniem wartości innej funkcji trygonometrycznej tego kąta (standard IV).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</td><td colspan="3">Wskaźnik łatwości zadania</td></tr>
<tr><td>LO</td><td>LP</td><td>T</td></tr>
<tr><td>0,59</td><td>0,67</td><td>0,40</td><td>0,50</td></tr>
</table>

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos\alpha$ lub tylko $\sin\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np.
  $\sin\alpha = \frac{5}{12}\cos\alpha$, $\frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze $\cos\alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α: $\alpha \approx 22°$ (akceptujemy wynik $\alpha \approx 23°$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

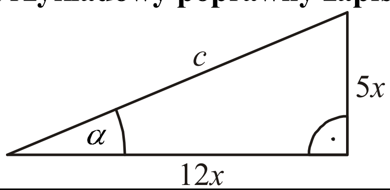
gdy:

- obliczy wartość $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość $\cos\alpha$: $\cos 22° \approx 0{,}9272$ lub $\cos 23° \approx 0{,}9205$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



$$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$
$$c = 13x$$
$$\cos\alpha = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$$

Komentarz:

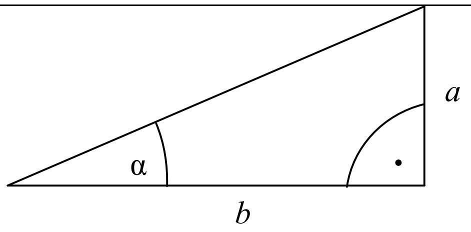
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Znajomość definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym jest elementarną umiejętnością z zakresu trygonometrii. Mimo to wciąż wielu zdających ma problemy z prawidłowym stosowaniem definicji i twierdzeń dotyczących funkcji trygonometrycznych. Stąd na przykład rozwiązania:

- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha = 5$ i $\cos\alpha = 12$

albo

-



$a = 12$

$b = 5$

$c = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{12}{13}$

W tym zadaniu najczęściej zdający zaskakiwali brakiem sprawności w wykonywaniu podstawowych działań arytmetycznych, błędami popełnianymi w trakcie przekształceń algebraicznych i niepoprawnym stosowaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Sprawdzane umiejętności

Przeprowadzenie dowodu nierówności algebraicznej (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,16	0,23	0,04	0,07

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- otrzyma nierówność równoważną $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ lub $\frac{a^2-2a+1}{2(a+1)} \geq 0$ i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy

- zapisze nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność $\frac{a^2-2a+1}{2(a+1)} \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej a.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$$

$$2(a^2+1) \geq (a+1)^2$$

$2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1$

$a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$(a-1)^2 \geq 0$

co kończy dowód.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne.
Zadania typu „wykaż” z reguły budzą obawy zdających, tak było również w tym przypadku – ponad 19% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.
Najczęściej popełnianym przez zdających błędem było dowodzenie prawdziwości twierdzenia dla kilku wybranych liczb całkowitych i wnioskowanie na tej podstawie o jego prawdziwości dla wszystkich liczb dodatnich. Pojawiały się też błędy związane z: niepoprawnymi przekształceniami algebraicznymi, np. $\frac{2a^2 + 1 - a^2 - a - a + 1}{2(a+1)} \geq 0$, a także błędy wynikające z niezrozumienia, kiedy trójmian kwadratowy jest nieujemny, np.

$a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$a = \frac{2}{2} = 1 > 0$.

Zadanie 31. ***(2 pkt)***
W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie obwodu trapezu z wykorzystaniem związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,46	0,56	0,23	0,34

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

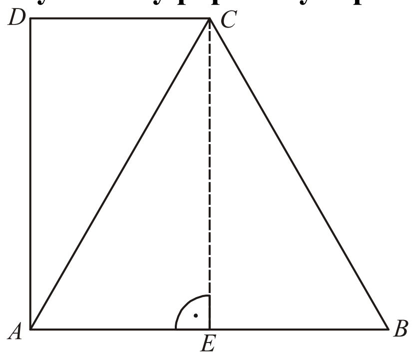
gdy
- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy długość krótszej podstawy trapezu ($|DC| = 3$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo
- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy wysokość trapezu ($h = 3\sqrt{3}$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy poprawnie obwód trapezu: $15 + 3\sqrt{3}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Prowadzimy wysokość CE trójkąta równobocznego ABC. Wówczas

$|AE| = 3$ i stąd $|CD| = |AE| = 3$.

Następnie $|BC| = |AB| = 6$

oraz $|DA| = |CE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Stąd obwód trapezu jest równy

$$6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}.$$

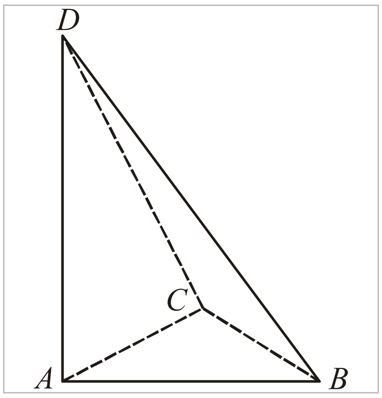
Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Problemy w tym zadaniu pojawiały się już na etapie podziału trapezu. Niektórzy zdający przyjmowali, że otrzymane trójkąty to: trójkąt prostokątny równoramienny i trójkąt równoboczny lub dwa trójkąty prostokątne. Często pojawiały się także błędy rachunkowe przy obliczaniu wysokości trapezu, np. $h^2 = 36 - 9 = 25$ lub jego obwodu, np. $6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Sprawdzane umiejętności

Obliczenie objętości ostrosłupa (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,48	0,59	0,23	0,36

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie wysokości AE trójkąta ABC: $|AE| = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* wynika, że $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ACD* wynika, że $|AC| = 5$.

W trójkącie *ABC* prowadzimy wysokość *AE*. Trójkąt *ABC* jest równoramienny ($|AB| = |AC|$), więc $|BE| = |EC| = 3$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABE* mamy $|AE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2 = 16$, stąd $|AE| = 4$.

Zatem $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Rozwiązywanie zadania ze stereometrii wymaga zawsze bardzo uważnej analizy jego treści, starannego zaplanowania postępowania i sprawnego posługiwania się pojęciami charakterystycznymi dla tego działu materiału. W tym zadaniu wymagano od zdających dostrzeżenia odpowiednich trójkątów prostokątnych i umiejętności zastosowania do nich twierdzenia Pitagorasa. Błędy w rozwiązaniu tego zadania najczęściej wynikały z niewłaściwej interpretacji podstawy ostrosłupa, np. zdający zakładali, że trójkąt *ABC* jest równoboczny albo jest trójkątem równoramiennym o długości ramienia 6.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *A* polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Sprawdzane umiejętności

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,35	0,43	0,20	0,26

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $A = \{(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{1}{6}$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Mamy model klasyczny.

$|\Omega|=36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)$

Zatem $|A|=6$ i stąd $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Było to bardzo typowe zadanie, w którym zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa" to najczęściej stosowany sposób rozwiązania drugiej części zadania. Rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych. Większość zdających nie potrafiła jednak poprawnie zbudować modelu rozwiązania. Częstym błędem zdających było podanie przy opisywaniu zdarzenia A pary $(3,4)$ niespełniającej warunków zadania. Zadanie pokazało, że wielu zdających ma poważne problemy z rozwiązaniem typowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących modelu klasycznego. Zostawianie odpowiedzi w postaci ułamka skracalnego świadczy o tym, że zdający nie czytali uważnie treści zadania i nie sprawdzali zgodności uzyskanego wyniku z poleceniem.

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,45	0,57	0,19	0,31

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń, na przykład: x, y - wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania $x\cdot y=240$ albo równania $(x+5)\cdot(y+2)=350$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np. $\begin{cases} x\cdot y=240 \\ (x+5)\cdot(y+2)=350 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np: $(x+5)\cdot\left(\frac{240}{x}+2\right)=350$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego, np. $x^2-50x+600=0$, skąd $x=20$ lub $x=30$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zapisanie wymiarów obu basenów:
Basen w pierwszym hotelu ma wymiary : 30 m x 8 m i w drugim hotelu 35 m x 10 m.
lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m x 12 m i w drugim 25 m x 14 m.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Oznaczmy przez x długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez y szerokość (w metrach) tego basenu (w metrach). Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x\cdot y=240 \\ (x+5)\cdot(y+2)=350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x\cdot y+2x+5y+10=350$, podstawiamy do tego równania $x\cdot y=240$ i wyznaczamy z tego równania, niewiadomą x:
$x=\frac{100-5y}{2}$. Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania
$\frac{100-5y}{2}\cdot y=240$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $y^2-20y+96=0$, które ma dwa rozwiązania: $y_1=8,\ y_2=12$.
Zatem:

- jeżeli $y=8$, to $x=30$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 30 m x 8 m, zaś basen w drugim hotelu: 35 m x 10 m,
- jeżeli $y=12$, to $x=20$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 20 m x 12 m, zaś basen w drugim hotelu: 25 m x 14 m.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Tylko połowa zdających nie miała trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji. Najwięcej błędów pojawiło się na etapie zapisywania układu równań, zdający pisali np.

- $\begin{cases} x\cdot y=240 \\ x+5\cdot y+2=350 \end{cases}$

albo

- $\begin{cases} 2x+2y=240 \\ 2(x+5)+2(y+2)=350 \end{cases}$

albo

- $\begin{cases} 2(xy+xz+yz)=240 \\ 2\left[(x+5)\cdot(y+2)+(x+5)z+(y+2)z\right]=350 \end{cases}$

Niestety, również nie wszyscy zdający potrafili poprawnie rozwiązać zapisany układ równań, popełniali błędy logiczne i rachunkowe. Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający nie budowali układu równań, a tylko podawali wymiary jednej lub dwóch par basenów, spełniających warunki zadania.

Arkusz II

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,61	0,65	0,38	0,31

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

albo

zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in(-\infty,-2)$ $\quad -2x-4-x+1\le 6$

II. $x\in\langle -2,1)$ $\quad 2x+4-x+1\le 6$

III. $x\in\langle 1,\infty)$ $\quad 2x+4+x-1\le 6$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiązał nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczył części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\langle -3,1\rangle$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x\in(-\infty,-2)$	$x\in\langle -2,1)$	$x\in\langle 1,\infty)$
$-2x-4-x+1\le 6$ $-3x\le 9$ $x\ge -3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3\le x<2$	$2x+4-x+1\le 6$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2\le x<1$	$2x+4+x-1\le 6$ $3x\le 3$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x=1$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3,1\rangle$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Pojawiające się w rozwiązaniach błędy pokazują, że część zdających nie opanowała w dostatecznym stopniu umiejętności stosowania definicji wartości bezwzględnej, mimo że zadanie z wartością bezwzględną pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.

Stąd na przykład błędy:

- $-6\le 2x+4+x-1\le 6$

albo

- $2x+4+x-1\le 6 \vee -2x-4-x+1\le 6$.

W prezentowanych rozwiązaniach najczęściej brakowało jednak wyznaczenia części wspólnej przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności. Pojawiały się też liczne błędy rachunkowe. Na podkreślenie zasługuje fakt, że poprawne rozwiązanie zadania przedstawiła duża grupa zdających.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x-5\sin x-4=0$ należące do przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązywanie równania trygonometrycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,74	0,77	0,21	0,31

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.
$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$ lub $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t=\sin x$, zapisanie równania w postaci
$-2t^2-5t-2=0$ lub $2t^2+5t+2=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t=-2$ lub $t=-\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t=-2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale: $x=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:
$2(1-\sin^2 x)-5\sin x-4=0$
Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:
$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$, $t=\sin x$, gdzie $t\in\langle -1,1\rangle$. Równanie przyjmuje teraz postać:
$2t^2+5t+2=0$
Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną t:
$\Delta=9 \quad t_1=-2 \quad t_2=-\frac{1}{2}$ ale $t_1\notin\langle -1,1\rangle$
Zapisujemy zatem rozwiązania równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ należące do przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$:
$x=\frac{11\pi}{6}$ i $x=\frac{7}{6}\pi$

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe.
Zdający, którzy przystąpili do rozwiązania równania zazwyczaj nie mieli problemów z doborem strategii zapewniającej sukces w rozwiązaniu zadania. „Jedynka trygonometryczna” to zależność dobrze znana i umiejętnie stosowana przez większość z nich. Problemu nie sprawiało również rozwiązanie równania kwadratowego, choć tutaj najczęściej zdający popełniali błędy logiczne i rachunkowe, np.
$-2t^2-5t-2=0$
$t=\frac{5+3}{2}=4$ lub $t=\frac{5-3}{2}=1$.
Warto również podkreślić, iż zdający nie mieli problemu z rozwiązaniem elementarnego równania trygonometrycznego, chociaż nie zawsze pamiętali o wskazaniu rozwiązań z przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***
Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE|=2|DF|$. Oblicz wartość $x=|DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązywanie zadania w kontekście praktycznym; badanie funkcji kwadratowej (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,35	0,38	0,08	0,16

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
Zapisanie, że $P_{AEF}=P_{ABCD}-P_{ADF}-P_{CEF}-P_{ABE}$ lub $P_{AEF}=P_{ABCD}-(P_{ADF}+P_{CEF}+P_{ABE})$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie pól trójkątów *ADF*, *ABE* i *CEF*: $P_{\Delta ADF}=\frac{1}{2}x$, $P_{\Delta ABE}=\frac{1-2x}{2}$ i $P_{\Delta CEF}=\frac{-2x^2+2x}{2}=-x^2+x$.

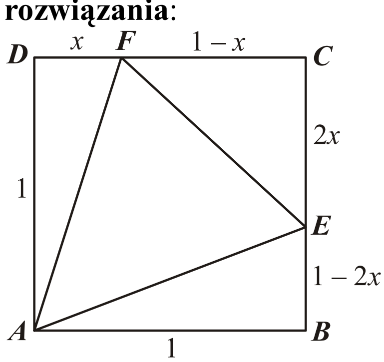
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej *x*: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Wyznaczenie *x*, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x=\frac{1}{4}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Długości odcinków $|BE|$ i $|CF|$ są równe: $|BE|=1-2x$, $|CF|=1-x$.

Pole trójkąta *AEF* jest więc równe:

$$P_{AEF}=P_{ABCD}-P_{ABE}-P_{ECF}-P_{FDA}=1-\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x)-\frac{1}{2}x=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Pole trójkąta *AEF* jest funkcją zmiennej *x*: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ dla $x\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $x_w=-\frac{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$ a parabola o równaniu $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x=\frac{1}{4}$ pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Błędy występowały już na etapie wprowadzenia oznaczeń, maturzyści zapisywali np. $|CE|=\frac{1}{2}x$ lub przyjmowali, że $|DF|=\frac{1}{3}$ a $|CE|=\frac{2}{3}$. Pojawiały się też błędy związane z obliczeniem pola trójkąta *AEF*. Zdający:

- zapominali o współczynniku $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta i zapisywali, np.
  $P_{AEF}=1-(1-2x)-2x(1-x)-x=2x^2-x$
- nie potrafili poprawnie przekształcić wyrażenia algebraicznego i zapisywali, np.
  $1-\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x)-\frac{1}{2}x=1-\frac{1}{2}-x-x-x^2-\frac{1}{2}x$
- popełniali błędy rachunkowe.

Zdający, którzy poprawnie zapisali pole trójkąta *AEF* jako funkcję zmiennej *x*, z reguły nie mieli kłopotów z rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Wyznacz wartości a i b współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ wiedząc, że $W(2) = 7$ oraz, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10.

Sprawdzane umiejętności

Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,73	0,77	0,63	0,46

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego do rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $8 + 4a + 2b + 1 = 7$ albo $27 + 9a + 3b + 1 = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z treści zadania i twierdzenia Bèzout wynika, że $W(2) = 7$ i $W(3) = 10$.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

Równanie $27 + 9a + 3b + 1 = 10$ możemy otrzymać z warunku $W(3) = 10$ lub wykonując dzielenie wielomianów i zapisując, że reszta z dzielenia jest równa 10.

Rozwiązujemy układ równań otrzymując kolejno

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a - 1 \\ 9a - 6a - 3 = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla $a = -5, \quad b = 9$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe.
Kluczowy dla rozwiązania tego zadania okazał się zapis $W(3)=10$. Większość zdających bez problemu poradziła sobie z tą umiejętnością, choć pojawiały się także inne zapisy, np. $W(x-3)=10$ albo $W(3)=0$. Jednak najwięcej błędów zdający popełniali na etapie rozwiązywywania układu równań, czyli w umiejętności, która na poziomie rozszerzonym nie powinna sprawiać żadnych trudności.

Zadanie 5. ***(5 pkt)***
O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg $(a,\, b,\, c)$ jest arytmetyczny i $a+c=10$, zaś ciąg $(a+1,\, b+4,\, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,82	0,85	0,83	0,63

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np. $2b=a+c$ albo $(b+4)^2=(a+1)(c+19)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb a, b, c, np. $\begin{cases} 2b=a+c \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą c lub a, np.
$c^2+8c-128=0$ lub $a^2-28a+52=0$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo
- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Wyznaczenie szukanych liczb: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Z własności ciągu arytmetycznego mamy: $2b = a + c$. Stąd otrzymujemy $2b = 10$, czyli $b = 5$.
Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $(b+4)^2 = (a+1)\cdot(c+19)$.

Zatem otrzymujemy układ równań, np. $\begin{cases} b = 5 \\ a + c = 10 \\ (b+4)^2 = (a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy $a = 10 - c$ lub $c = 10 - a$ i wstawiamy do trzeciego równania.
Otrzymujemy równanie, np. $9^2 = (10 - c + 1)(c + 19)$ lub $9^2 = (a+1)(10 - a + 19)$.
Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą c lub a, np.
$c^2 + 8c - 128 = 0$ lub $a^2 - 28a + 52 = 0$.
Rozwiązaniami tego równania są :
$c_1 = 8,\ c_2 = -16$ lub $a_1 = 2,\ a_2 = 26$.
Zatem szukanymi liczbami są: $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$ lub $a = 26,\ b = 5,\ c = -16$

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem w tym arkuszu.
Kolejny raz okazało się, że zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności obu ciągów), trudności pojawiły się jednak na etapie rozwiązywania układu równań. Najczęściej były to błędy rachunkowe. Wielu zdających miało też problemy z właściwą interpretacją otrzymanych wyników i odrzucało rozwiązanie $c_2 = -16$ jako niespełniające warunków zadania.

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dyskusji dotyczącej rozwiązań równania kwadratowego z parametrem (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	**LP**	**T**
0,64	0,68	0,23	0,32

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, \infty\right)$.
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$, $m \in (-3, 3)$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).
Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące kategorie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ w postaci równoważnej $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2+\left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2>2m^2-13.$$

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $m^2-9<0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Rozwiązanie nierówności: $m\in(-3,3)$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

$x^2+mx+2=0$

Zapisujemy układ nierówności:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>2m^2-13\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$\Delta=m^2-8$

$\Delta>0$

$m^2-8>0$

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-m)^2-2\cdot2=m^2-4$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$m^2-4>2m^2-13$

$m^2-9<0$, więc $m\in(-3,3)$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in(-3,3)$,

więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Był to typowy problem z zakresu funkcji kwadratowej (pojawiający się w arkuszach maturalnych), dlatego zdający nie mieli problemu z doborem strategii rozwiązania tego zadania. Błędy najczęściej pojawiały się na etapie rozwiązania nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$,. Zdający zapisywali, np. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2$ lub, korzystając ze wzorów Viète'a, pisali: $x_1+x_2=\frac{-b}{2a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{2a}$. Nie wszyscy zdający pamiętali także o konieczności rozważenia warunku $\Delta>0$.

Zadanie 7. ***(6 pkt)***
Punkt $A=(-2,5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie równania do opisania zależności w prostokątnym układzie współrzędnych (standard IV).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,43	0,46	0,08	0,25

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
Obliczenie odległości punktu A od prostej $y=x+1$: $d=3\sqrt{2}$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Obliczenie długości odcinków AC i BC: $|AC|=|BC|=5\sqrt{2}$.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt
Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu C (odległość $|AC|=5\sqrt{2}$ oraz punkt C należy do prostej o równaniu $y=x+1$)

$$\begin{cases} y=x+1 \\ (x+2)^2+(y-5)^2=50 \end{cases}$$

i zapisanie równania kwadratowego: $x^2-2x-15=0$.
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Rozwiązanie pełne ....6 pkt
Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C=(5,6)$ lub $C=(-3,-2)$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Obliczamy odległość punktu A od prostej $y=x+1$: $d=\frac{|-2-5+1|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.
Obliczona odległość d jest równa wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC. Znamy pole trójkąta ABC, więc obliczamy długość boku BC.

$P_{ABC}=15 \qquad \frac{1}{2}d\cdot|BC|=15 \qquad |BC|=\frac{30}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

Punkt $C=(x,y)$ leży na prostej o równaniu $y=x+1$, zatem $C=(x,x+1)$.
Ponieważ $|AC|=|BC|$, więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$\sqrt{(x+2)^2+(x+1-5)^2}=5\sqrt{2}$.

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$\sqrt{(x+2)^2+(x+1-5)^2}=5\sqrt{2}$

$x^2+4x+4+x^2-8x+16=50$

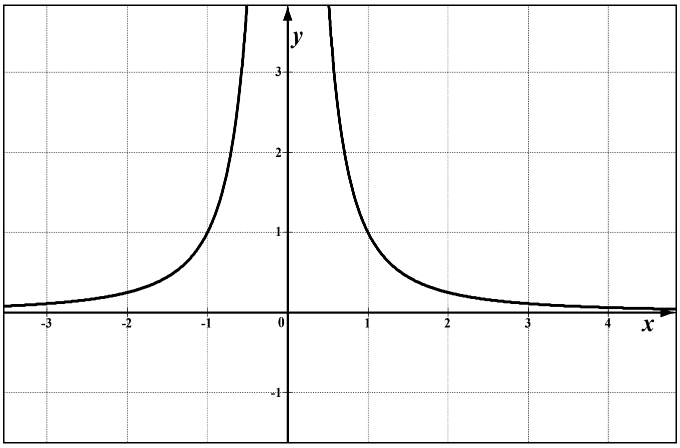
$x^2-2x-15=0$

$\Delta=64 \qquad x_1=5 \qquad x_2=-3$ i następnie $y_1=6 \qquad y_2=-2$

Ostatecznie otrzymujemy dwa punkty: $C_1=(5,6)$ $C_2=(-3,-2)$.
Komentarz: Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne. Analizując rozwiązania, można zauważyć, że zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego problemu, potrafili wykorzystać informację o polu trójkąta, tzn. obliczyć długość boku *BC*. Niestety, w dalszej części rozwiązania najczęściej popełnianym błędem było przyjęcie, że $\lvert AB\rvert=\lvert AC\rvert$. Pojawiły się także rozwiązania, w których zdający po obliczeniu długości odcinków *AD*, *AC* i *CD* (punkt *D* jest rzutem prostokątnym punktu *A* na prostą o równaniu $y=x+1$) odczytywali współrzędne punktu *C* z rysunku, gubiąc jedno rozwiązanie. Podczas rozwiązywania tego zadania zdający popełniali wiele błędów rachunkowych.

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Przeprowadzono prostą równoległą do osi Ox, która przecięła wykres tej funkcji w punktach A i B. Niech $C=(3,-1)$. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2.



Sprawdzane umiejętności Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (standard V).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,28	0,30	0,10	0,13

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A=\left(x,\dfrac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\dfrac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x>0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie długości odcinka *AB* oraz wysokości h trójkąta *ABC*, np.: $\lvert AB\rvert=2\lvert x\rvert$ i $h=\dfrac{1}{x^2}+1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od jednej zmiennej: $P_{ABC}=\dfrac{2\cdot|x|\cdot\left|\frac{1}{x^2}+1\right|}{2}=\dfrac{1}{|x|}+|x|$.

Rozwiązanie pełne **5pkt**

Uzasadnienie, że $\dfrac{1}{|x|}+|x|\geq 2$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A=\left(x,\dfrac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\dfrac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x\neq 0$.

Zapisujemy pole trójkąta ABC, gdzie $C=(3,-1)$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{ABC}=\frac{2\cdot|x|\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{2}=\frac{1}{|x|}+|x|.$$

Należy udowodnić, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2, czyli $\dfrac{1}{|x|}+|x|\geq 2$, dla

$x\neq 0$.

Wystarczy wobec tego udowodnić (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby $a>0$ zachodzi nierówność $\dfrac{1}{a}+a\geq 2$. Po pomnożeniu obu stron nierówności przez a otrzymujemy nierówność równoważną $1+a^2\geq 2a$, czyli $a^2-2a+1\geq 0$, a więc nierówność $(a-1)^2\geq 0$, co kończy dowód.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Prawie 6% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu, co potwierdza, że zadania typu „wykaż” budzą obawy także wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym. Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem pola trójkąta ABC w zależności od jednej zmiennej. Trudności pojawiały się na etapie uzasadnienia, że $\dfrac{1}{|x|}+|x|\geq 2$. Zdający pisali na przykład:

- $\dfrac{1}{x}+x\geq 2,\ x\neq 0$, czyli $1+x^2\geq 2x,\ x\neq 0$
- $\dfrac{1}{x}+x\geq 2$, zatem $\dfrac{1-2x+x^2}{x}\geq 0$, czyli $x\left(1-2x+x^2\right)\geq 0$ dla $x\in R\setminus\{0\}$

albo dowodzili prawdziwości nierówności $\dfrac{1}{a}+a\geq 2$ bez założenia, że $a>0$.

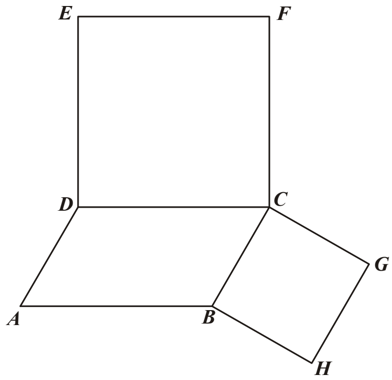
Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający dowodzili, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2 dla wybranych punktów A, B, spełniających warunki zadania, np.

$A=(1,1)$, $B=(-1,1)$ $C=(3,-1)$

$|AB|=2$ i $h=2$

$P_{ABC}=\dfrac{2\cdot 2}{2}=2\geq 2$.

Zadanie 9. ***(4 pkt)***
Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	**LP**	**T**
0,60	0,62	0,17	0,40

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zaznaczenie na rysunku odcinków AC i FG oraz zapisanie równości $|AB| = |CF|$ i $|BC| = |CG|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Stwierdzenie, że trójkąty ABC i FCG są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Stwierdzenie, że trójkąty ABC i FCG są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$ i niezapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

albo

- Stwierdzenie, że trójkąty ABC i FCG są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$, oraz zapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, czworokąt $DCFE$ jest kwadratem, więc $|AB| = |CD| = |CF|$. W kwadracie $CBHG$ odcinki BC i CG są równe.

Niech α oznacza kąt ABC danego równoległoboku. Wówczas $|\sphericalangle BCD| = 180° - \alpha$.

W kwadratach $CDEF$ oraz $CBHG$ mamy $|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle BCG| = 90°$, więc

$|\sphericalangle FCG| = 360° - (180° - \alpha) - 90° - 90° = \alpha = |\sphericalangle ABC|$.

W trójkątach ABC i FCG mamy zatem: $|AB| = |CF|$, $|BC| = |CG|$ oraz $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$, więc trójkąty ABC i FCG są przystające (cecha *bkb*). Stąd wnioskujemy, że $|AC| = |FG|$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Większość zdających próbowała zmierzyć się z problemem przeprowadzenia dowodu matematycznego zapewne ze względu na przyjazne treści. Rozwiązanie tego problemu wymagało bowiem od zdających znajomości podstawowych wiadomości dotyczących przystawania trójkątów, umiejętności logicznego formułowania i uzasadniania wniosków oraz poprawnego ich zapisywania w języku matematyki. Na podstawie analizy rozwiązań uczniowskich można zauważyć, że zdający nie mieli problemów ze stwierdzeniem, że trójkąty ABC i FCG są przystające na podstawie cechy (*bkb*). Niestety, niewielu zdających uzasadniało równość kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Zadanie 10. ***(4 pkt)***
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,30	0,31	0,33	0,23

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Istotny postęp.. 2 pkt

Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A: $|A| = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

$P(A) = \frac{1}{3}$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Określamy zdarzenie A – suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.
Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma trzech kwadratów będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.
Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.
$|A|$ możemy obliczać następująco:

- ciągi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
- ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,

czyli $\lvert A\rvert = 2^3 + 4^3 = 72$ Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.
Komentarz: Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne. Większość zdających potrafiła określić liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli zapisać $\lvert\Omega\rvert = 6^3$. Problemy pojawiły się natomiast na etapie opisania zbioru zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Niewielu zdających zapisało, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3. Pojawiały się natomiast obliczenia, np. $\lvert A\rvert = 2^3$ albo $\lvert A\rvert = 4^3$ albo $\lvert A\rvert = C_6^2 \cdot C_6^2 \cdot C_6^2 + C_6^4 \cdot C_6^4 \cdot C_6^4$. Nieliczna grupa zdających próbowała rozwiązać to zadanie, wypisując wszystkie 216 zdarzeń elementarnych i sprawdzając, które z nich spełniają podany warunek. Próby te z reguły kończyły się sukcesem.

Zadanie 11. ***(4 pkt)***
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzane umiejętności
Wyznaczenie objętość wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,25	0,27	0,03	0,10

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Rozwiązanie, w którym jest istotny .... 2 pkt

Wyznaczenie wysokości EF trójkąta ABE w zależności od a i α: $m = \frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}$.

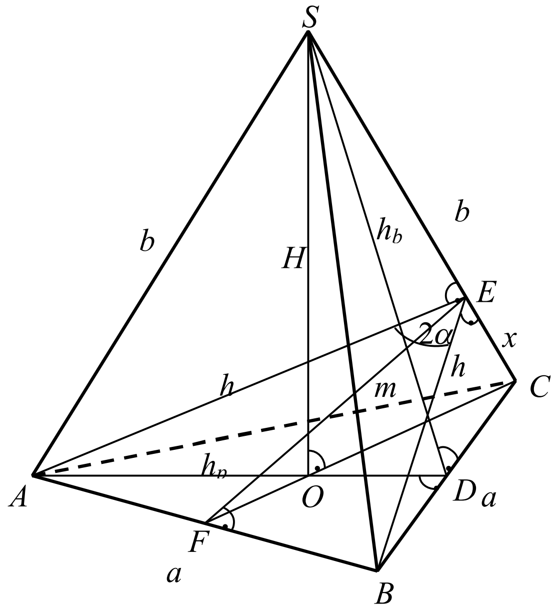
Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 pkt

Wyznaczenie długości odcinka EC: $x = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3\left(4\sin^2\alpha - 1\right)}}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wyznaczamy wysokość FE trójkąta równoramiennego ABE

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka EC z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCE:

$$x = \sqrt{h_p^{\,2} - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\mathrm{tg}^2\alpha - 1}{4\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów OCS i ECF mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

Stąd $$H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne i jednocześnie było najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.

Rozwiązywanie tego zadania wymagało przede wszystkim opanowania wiadomości dotyczących kąta dwuściennego i uważnej analizy jego treści, a co za tym idzie – opracowania strategii rozwiązania obliczenia wysokości ostrosłupa. Zdający popełniali błędy już na etapie wykonywania rysunku pomocniczego, niewłaściwie zaznaczając kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi. Pojawiały się błędy rachunkowe i logiczne. Wielu zdających ograniczyło się tylko do wyznaczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa, np.

$\sin\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$, stąd $h = \frac{a}{2\sin\alpha}$, nie mając pomysłu na rozwiązanie postawionego w zadaniu problemu.

Wnioski wynikające z analizy jakościowej zadań

Wyniki egzaminu maturalnego kolejny raz pokazały, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych, większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania.

Egzamin pokazał, że w pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń. Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki poprzedzone było szeroką akcją informacyjną skierowaną do uczniów i nauczycieli. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym,* a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE we wrześniu i listopadzie 2009 roku. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami, przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2011, warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się w rozwiązaniu na znanych algorytmach),
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.