Matematyka

Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zostały opracowane na dwóch poziomach:

- podstawowym – *Arkusz I* (MMA-P1_1P-112)
- rozszerzonym – *Arkusz II* (MMA-R1_1P-112)

Arkusz I zawierał 33 zadania, w tym 23 zamknięte (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 10 zadań otwartych. Zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 170 minut.
Arkusz II zawierał 12 zadań otwartych, zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 180 minut.
Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.
Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu podstawowego i rozszerzonego.

Analiza jakościowa

Arkusz I

Zadania zamknięte

W maju 2011 roku, podobnie jak rok wcześniej, o odsetku sukcesów na egzaminie maturalnym na poziomie podstawowym zadecydowały głównie zadania zamknięte. Tylko trzy zadania (4, 16 i 19) były dla zdających trudne. Najtrudniejszym z nich okazało się zadanie 19, wymagające znajomości pojęcia stycznej do okręgu. Jest to zaskakujące nie tyko dlatego, że ten problem łatwo rozwiązać, wykonując odpowiedni rysunek, ale i dlatego, że również rozwiązanie algebraiczne sprowadzało się do elementarnych obliczeń. Trzy zadania (2., 3. i 21.) okazały się dla zdających bardzo łatwe. Dwa najłatwiejsze wymagały zastosowania obliczeń procentowych w typowej sytuacji praktycznej (zadanie 2.) oraz rozłożenia wielomianu na czynniki z zastosowaniem wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias (zadanie 3.). Zadania tego typu pojawiały się już kilkakrotnie w arkuszach egzaminacyjnych. Pozostałe zadania znalazły się w grupie zadań umiarkowanie trudnych (1., 5., 6., 7., 10., 11., 14., 18., 22.) albo łatwych (9., 12., 13., 15., 17., 20., 23.).

Zadanie 1. ***(1 pkt)***
Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.

A. $|x+1|>5$ **B.** $|x-1|<2$ **C.** $\left|x+\frac{2}{3}\right|\le 4$ **D.** $\left|x-\frac{1}{3}\right|\ge 3$

Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do sprawdzenia, czy dana liczba spełnia nierówność (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,62	0,68	0,44	0,37	0,57	0,34
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 2. ***(1 pkt)***
Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje

A. 1701 zł. **B**. 2100 zł. **C.** 1890 zł. **D.** 2091 zł.

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie obliczeń procentowych w sytuacji praktycznej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,92	0,95	0,83	0,66	0,90	0,64
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 3. ***(1 pkt)***
Wyrażenie $5a^2-10ab+15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1-10b+3)$ **B.** $5a(a-2b+3)$ **C.** $5a(a-10b+15)$ **D.** $5(a-2b+3)$

Sprawdzane umiejętności Rozłożenie wielomianu na czynniki z zastosowaniem wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,92	0,94	0,88	0,73	0,92	0,68
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 4. ***(1 pkt)***

Układ równań $\begin{cases}4x+2y=10\\6x+ay=15\end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a=-1$ **B.** $a=0$ **C.** $a=2$ **D.** $a=3$

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie układu równań (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,49	0,57	0,35	0,32	0,40	0,32
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Rozwiązanie równania $x(x+3)-49=x(x-4)$ należy do przedziału

A. $(-\infty,3)$ **B.** $(10,+\infty)$ **C.** $(-5,-1)$ **D.** $(2,+\infty)$

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie równania liniowego i sprawdzenie, czy rozwiązanie należy do danego przedziału (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,57	0,65	0,39	0,31	0,48	0,27
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 6. ***(1 pkt)***

Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

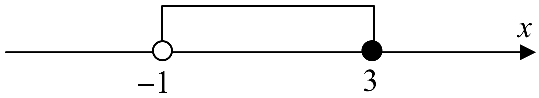
A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

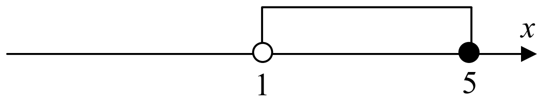
Sprawdzane umiejętności
Sprawdzenie, które z podanych liczb spełniają nierówność i wybranie z nich najmniejszej (standard II).

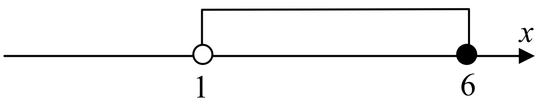
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,56	0,63	0,41	0,36	0,49	0,40

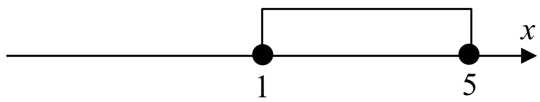
Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 7. ***(1 pkt)***
Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\le 0$ i $x>1$.

A.


C.


B.


D.


Sprawdzane umiejętności
Zinterpretowanie rozwiązania nierówności kwadratowej i liniowej na osi liczbowej (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,57	0,63	0,44	0,33	0,50	0,32

Poprawna odpowiedź: **C**.

Zadanie 8. ***(1 pkt)***
Wyrażenie $\log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

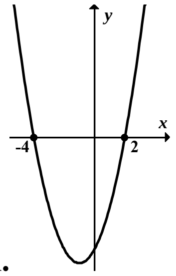
A. $x\le\frac{1}{2}$ B. $x>\frac{1}{2}$ C. $x\le 0$ D. $x>0$

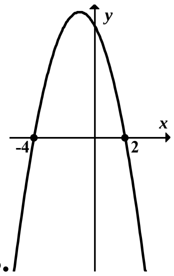
Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie definicji logarytmu (standard II).

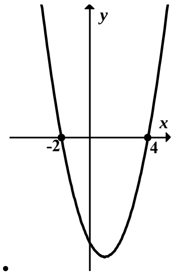
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,53	0,61	0,36	0,35	0,44	0,34

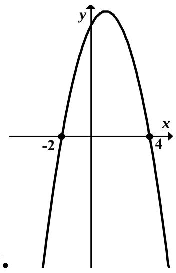
Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 9. ***(1 pkt)***
Dane są funkcje liniowe $f(x)=x-2$ oraz $g(x)=x+4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

A. 

B. 

C. 

D. 

Sprawdzane umiejętności Określenie funkcji za pomocą wzoru i interpretowanie wykresów funkcji kwadratowych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,72	0,79	0,59	0,36	0,65	0,30
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 10 ***(1 pkt)***

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie miejsca zerowego funkcji liniowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,67	0,76	0,50	0,36	0,57	0,32
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 11. ***(1 pkt)***

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ **B.** $a_1 = \frac{4}{9}$ **C.** $a_1 = \frac{3}{2}$ **D.** $a_1 = \frac{9}{4}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,61	0,69	0,42	0,28	0,53	0,27
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 12. ***(1 pkt)***

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ **B.** $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ **C.** $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ **D.** $a_5 + a_7 = 2a_8$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,82	0,86	0,71	0,56	0,80	0,52
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 13. ***(1 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego, gdy dana jest wartość jednej z nich (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,83	0,89	0,72	0,48	0,79	0,43
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 14. ***(1 pkt)***

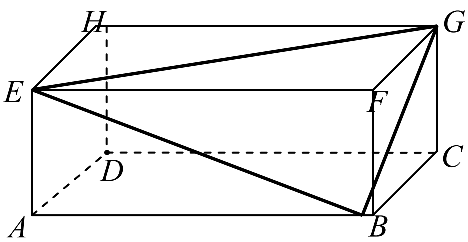
Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38° + \cos^2 38° - 1}{\sin^2 52° + \cos^2 52° + 1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,82	0,86	0,71	0,56	0,80	0,52
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 15. ***(1 pkt)***

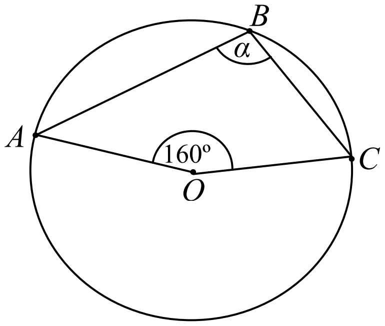
W prostopadłościanie *ABCDEFGH* mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków *AB*, *BG*, *GE*, *EB* jest najdłuższy?



A. *AB* **B.** *BG* **C.** *GE* **D.** *EB*

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w przestrzeni (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,86	0,89	0,74	0,74	0,83	0,73
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. $80°$ **B.** $100°$ **C.** $110°$ **D.** $120°$

Sprawdzane umiejętności					
Skorzystanie ze związków między kątem środkowym i kątem wpisanym (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,41	0,46	0,27	0,27	0,35	0,27
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 17. ***(1 pkt)***
Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym $60°$ jest równa

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 6

Sprawdzane umiejętności					
Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,72	0,78	0,56	0,46	0,65	0,40
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 18. ***(1 pkt)***
Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

A. $y = -2x + 3$ *B.* $y = 2x + 1$ *C.* $y = 2x + 5$ *D.* $y = -x + 1$

Sprawdzane umiejętności					
Zbadanie równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,63	0,74	0,42	0,30	0,52	0,20
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 19. ***(1 pkt)***
Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu

A. $x = 1$ **B.** $x = 3$ **C.** $y = 0$ **D.** $y = 4$

Sprawdzane umiejętności
Posłużenie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ i sprawdzanie, czy dana prosta jest styczną do danego okręgu (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,39	0,46	0,27	0,27	0,29	0,29
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 20. ***(1 pkt)***
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** $3\sqrt{3}$

Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,74	0,80	0,57	0,44	0,68	0,43
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π **B.** 96π **C.** 64π **D.** 32π

Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie związków miarowych w bryłach obrotowych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,91	0,94	0,83	0,72	0,89	0,73
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 22. ***(1 pkt)***
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,59	0,66	0,46	0,30	0,52	0,30
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 23. ***(1 pkt)***
Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?” Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Sprawdzane umiejętności Obliczenie średniej arytmetycznej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,70 - łatwe	0,77	0,49	0,38	0,63	0,36
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadania otwarte

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:

http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/kryteria/matematyka_model_PP.pdf

Zadanie 24. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Sprawdzane umiejętności Rozwiązywanie nierówności kwadratowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,70	0,77	0,56	0,27	0,62	0,26

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $3x^2 - 10x + 3$:

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 \quad \text{i stąd} \quad x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$$

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

albo

- popełni błąd przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$ lub $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$ lub $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

Komentarz

Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających i było najłatwiejszym z zadań otwartych w tym zestawie egzaminacyjnym.

Nieco ponad 55% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali zdający popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania.

Część zdających prawidłowo wyznaczała pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale błędnie podawała zbiór rozwiązań nierówności, np. wskazując obliczone pierwiastki jako zbiór rozwiązań tej nierówności. Dość często pojawiały się rozwiązania, w których zdający błędnie

zapisywali zbiór rozwiązań nierówności, np. w postaci przedziału otwartego lub sumy przedziałów $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle 3, +\infty\right)$. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.
Niestety, grupa około 16% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie tej nierówności kwadratowej, mimo iż ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie CKE i OKE).

Zadania 25. (2 pkt)
Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia (standard V).

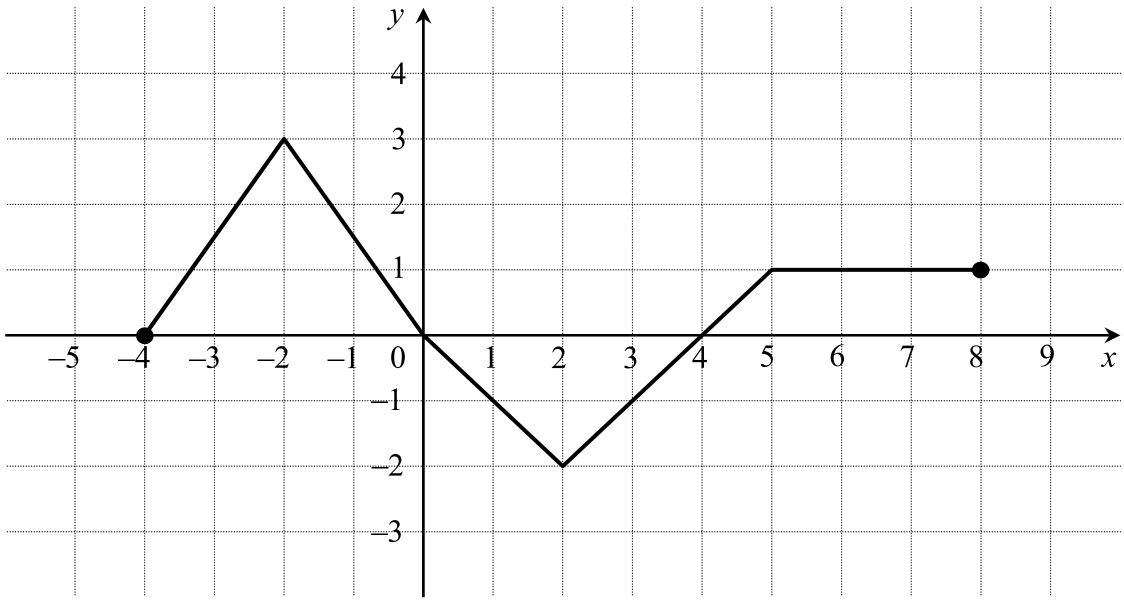
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,12	0,18	0,01	0,01	0,04	0,00

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Ponieważ $a+b=1$, więc $(a+b)^2=1$, czyli $a^2+2ab+b^2=1$.
Ponieważ $a^2+b^2=7$, więc $2ab+7=1$. Stąd mamy $ab=-3$ i $a^2b^2=(ab)^2=9$.
Stosując wzory skróconego mnożenia, zapisujemy wyrażenie $a^4+b^4=31$ w postaci:
$(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=31$, czyli $7^2-2\cdot 9=31$, co należało uzasadnić.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy, korzystając z założeń, obliczy, że $ab=-3$, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Komentarz
Zadanie okazało się bardzo trudne dla ogółu zdających.
Zadania typu „wykaż" z reguły budzą obawy zdających. Tak było również w tym przypadku. Prawie 85% maturzystów nie podjęło próby bądź nie uczyniło żadnego postępu na drodze do rozwiązania zaprezentowanego problemu, a tylko 7,6% zdających uzasadniło postawioną w zadaniu tezę.
Błędy w rozwiązaniu zadania pojawiały się na różnych etapach, także już w pierwszej fazie rozwiązywania. Niektórzy zdający popełniali błędy, stosując wzory skróconego mnożenia, np. $(a+b)^2=1$ to $a^2+b^2=1$ lub $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2ab$. Inni nie potrafili poprawnie wykonać działań na liczbach niewymiernych. Często bowiem pojawiały się rozwiązania, w których zdający, korzystając z założeń, otrzymywali równanie z jedną niewiadomą, np. $a^2+(1-a)^2=7$. Następnie obliczali $a_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $a_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Za bezbłędne wykonanie tego etapu rozwiązania zdający otrzymywali 1 punkt. Z reguły w dalszej części rozwiązania pojawiały się problemy związane z obliczeniem wartości wyrażenia a^4+b^4.
Błędem rzadziej popełnianym niż w roku ubiegłym było dowodzenie prawdziwości tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowanie na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb spełniających założenie.

Zadanie 26. ***(2 pkt)***
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

Sprawdzane umiejętności
Odczytanie z wykresu funkcji: zbioru wartości oraz maksymalnego przedziału, w którym funkcja maleje (wykorzystanie i tworzenie informacji – standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,51	0,61	0,32	0,16	0,40	0,13

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$

Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2, 2\rangle$

Przydział punktów za rozwiązanie zadania:
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze przedział maksymalnej długości, w którym ta funkcja jest malejąca.

albo

- zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór wartości funkcji f .

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ oraz przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność odczytywania podstawowych własności funkcji z jej wykresu. Tylko 32,6 % zdających poprawnie odczytało i zapisało wskazane własności funkcji, otrzymując tym samym 2 punkty za to zadanie. Niestety, 30,6 % zdających nie udzieliło poprawnej odpowiedzi do żadnego z podanych poleceń.

Zdający mylili zbiór wartości funkcji z jej dziedziną, stąd często pojawiała się odpowiedź $\langle -4, 8\rangle$, albo zapisywali zbiór wartości funkcji w postaci $(-2, 3)$ lub $\langle 3, -2\rangle$. Podobnie, w przypadku zapisu przedziału maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca, pojawiały się błędne zapisy przedziału, np. $\{-2,2\}$ lub $(3, -2)$, czy też niepoprawne sformułowania postaci „*f* jest malejąca od $(-2, 3)$ do $(2, -2)$”.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***
Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$. Oblicz x i y.

Sprawdzane umiejętności
Zastosowanie wzorów na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystanie własności trzech kolejnych wyrazów do obliczenia wyrazów ciągu (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,51	0,64	0,25	0,08	0,36	0,05

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, stąd $2y = x + 19$.
Zapisujemy więc układ równań
$$\begin{cases} 2y = x+19 \\ x+y=8 \end{cases}$$
Jego rozwiązaniem jest $x=-1$ i $y=9$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie, np.: $2y = x+19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy: $x=-1$ i $y=9$.

Komentarz
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla ogółu zdających.
Około 42% maturzystów rozwiązało to zadanie bezbłędnie. Prawie równoliczna grupa 41% zdających nie uzyskała żadnego punktu za przedstawione rozwiązanie, bądź nie podjęła próby rozwiązania tego zadania.

Zaskakiwał fakt, że niektórzy zdający nadal nie potrafili poprawnie zapisać równości wynikającej z własności trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Pojawiały się na przykład zapisy $x-y=19-y$ czy też $y=x+19$. A przecież to zagadnienie pojawiało się w wielu arkuszach egzaminacyjnych, zarówno wśród zadań zamkniętych, jak i otwartych. Zdarzały się też błędy wynikające z zastosowania własności ciągu geometrycznego zamiast arytmetycznego. Trudności pojawiły się też na etapie rozwiązywania układu równań. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający przyjmowali, że suma trzech wyrazów jest równa 19 albo błędnie zapisywali $19 = x + (19-1)r$. Pojawiły się również rozwiązania, w których zdający sprawdzali warunki zadania dla kilku wybranych wartości x i y, a następnie formułowali odpowiedź, często błędną. Było to zazwyczaj wynikiem błędów rachunkowych, popełnianych podczas obliczania różnicy ciągu arytmetycznego.

Również w tym zadaniu pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali (bez obliczeń): $x=-1$, $y=9$ i nie uzasadniali, że jest to jedyne rozwiązanie. Za takie rozwiązanie, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali 1 punkt.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Sprawdzane umiejętności

Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostr (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,35	0,48	0,11	0,03	0,18	0,02

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Sprowadzamy wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$. Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$, a stąd $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy sprowadzi wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Komentarz

Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających.

Tylko 31% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a prawie 62% zdających otrzymało 0 punktów za przedstawione rozwiązanie bądź nie podjęło próby rozwiązania przedstawionego problemu.

Zdający najczęściej stosowali I sposób rozwiązania, czyli sprowadzali wyrażenie do wspólnego mianownika, zauważali w liczniku jedynkę trygonometryczną i obliczali wartość szukanego wyrażenia. Wielu zdających nie poradziło sobie już na pierwszym etapie rozwiązania tego zadania, popełniając błędy podczas sprowadzenia wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika, np.: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

Niektórzy maturzyści po poprawnym sprowadzeniu wyrażenia do wspólnego mianownika błędnie skracali wyrażenia algebraiczne, inni zostawiali licznik w postaci $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ lub $\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha$, nie zauważając jedynki trygonometrycznej. Zdarzały się rozwiązania, w których podczas mnożenia wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ przez 2 pojawiał się wynik $2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha$. Część rozwiązań zostawała w postaci $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2$ (brak umiejętności przekształcenia równania wymiernego).

Zdający często zapisywali $\sin\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha$ lub analogicznie $\cos\alpha \cdot \cos\alpha = 2\cos\alpha$.

Bardzo rzadko uczniowie podejmowali próby rozwiązania zadania drugą metodą opisaną w kluczu oceniania. Ci, którzy zdecydowali się na tę metodę, zwykle kończyli swoje rozwiązanie na zapisaniu równania $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = 2$. Zdarzały się prace, gdzie zdający bez uzasadnienia zapisywali, że $\alpha = 45°$, albo też przyjmowali, że $\alpha = 30°$ lub $\alpha = 60°$ i z tablic odczytywali wartości funkcji trygonometrycznych dla tych kątów.

Jeśli uczniowie w rozwiązaniach korzystali z zależności $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$ i $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha$, to często zapisywali jedynie równanie $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2$ (ewentualnie $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = 2$) i na tym kończyli odpowiedź. Zdarzały się również rozwiązania, w których uczniowie zapisywali poprawnie układ równań $\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ i nie potrafili go poprawnie rozwiązać.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Dany jest czworokąt *ABCD*, w którym $AB \parallel CD$. Na boku *BC* wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt *AED* jest prosty.

Sprawdzane umiejętności

Uzasadnienie, że wskazany kąt jest prosty (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,07	0,11	0,00	0,00	0,01	0,00

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Niech $|\sphericalangle CED| = \alpha$. Ponieważ trójkąt *DCE* jest równoramienny i $|EC| = |CD|$, to $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$. Zatem $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\alpha$.

Podobnie, ponieważ trójkąt *ABE* jest równoramienny i $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \beta$, to $|\sphericalangle ABE| = 180° - 2\beta$.

Kąty *ABE* i *DCE* są kątami wewnętrznymi trapezu *ABCD* i $|\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle ABE| = 180°$.

Stąd $180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$, czyli

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$.

Zatem $|\sphericalangle AED| = 180° - |\sphericalangle CED| - |\sphericalangle AEB| = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy napisze zależności między miarami kątów w trójkątach równoramiennych *ABE* i *DCE*, np. $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\alpha$ i $|\sphericalangle ABE| = 180° - 2\beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|\sphericalangle AED| = 90°$.

Komentarz
Zadanie okazało się bardzo trudne dla ogółu zdających i było najtrudniejszym z zadań otwartych w tym zestawie egzaminacyjnym.
Tylko 6% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a prawie 92% nie podjęło próby jego rozwiązania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.
Kolejny raz zatem okazało się, że rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów trudne, niezależnie od złożoności strategii czy rozumowania, które powinni przeprowadzić.
Tym razem do udowodnienia tezy wystarczył poprawnie wykonany rachunek kątów, oczywiście o ile zdający zauważył, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem i nie przyjął żadnych dodatkowych założeń. Niestety, zdający najczęściej popełniali błąd, zakładając, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. W wielu pracach pojawiły się także dodatkowe założenia o kątach, np. $|\sphericalangle CED| = 45°$ i $|\sphericalangle ABE| = 45°$.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***
Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,45	0,52	0,32	0,11	0,38	0,14

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A:
$$A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(2,7),(3,3),(3,6),(4,2)$$
$$(4,5)(5,1),(5,4),(5,7),(6,3),(6,6),(7,2),(7,5)\}$$
czyli $|A| = 16$, zatem $P(A) = \frac{16}{49}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo
- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 16$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{16}{49}$.

Komentarz
Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających.
Tylko 33,7% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie i aż 42,9% zdających nie podjęło próby jego rozwiązania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.
Rozwiązując to zadanie, zdający najczęściej stosowali definicję klasyczną prawdopodobieństwa. Błędy pojawiały się już na etapie zliczania wszystkich zdarzeń elementarnych. Często maturzyści zapisywali $|\Omega| = 14$ lub $|\Omega| = 7^3$. Najwięcej problemów jednak sprawiło zdającym zliczenie zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A, najczęściej zdający pomijali niektóre z tych zdarzeń i zapisywali np. $|A| = 10$ lub $|A| = 15$.
Zaskakiwał fakt, że część zdających nieprawidłowo zliczała liczbę zdarzeń elementarnych, sprzyjających danemu zdarzeniu, pomimo poprawnego ich wypisania lub zaznaczenia w tabeli.
Mniejsza część populacji zdających wybierała rozwiązania z wykorzystaniem drzewa stochastycznego. W tym sposobie rozwiązania zdający najczęściej popełniali różne błędy:

- narysowane drzewa nie zawierały istotnych gałęzi, były niekompletne,
- na istotnych gałęziach drzewa nie było zapisanych prawdopodobieństw,
- przy obliczaniu prawdopodobieństwa brano pod uwagę gałęzie, które nie spełniały warunków zadania,
- dodawano prawdopodobieństwo na gałęziach drzewa.

W wielu przedstawionych rozwiązaniach zabrakło refleksji nad otrzymanym wynikiem, stąd część zdających zapisywała, że prawdopodobieństwo jest liczbą większą od 1.

Zadanie 31. ***(4 pkt)***
Okrąg o środku w punkcie $S = (3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Sprawdzane umiejętności
Wyznaczenie współrzędnych punktu styczności prostej z okręgiem (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,20	0,29	0,04	0,01	0,09	0,00

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Wyznaczamy współczynnik kierunkowy m prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x - 3$: $m = -\frac{1}{2}$.
Zapisujemy równanie prostej prostopadłej do stycznej i przechodzącej przez punkt $S = (3,7)$:
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$.
Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$$
$$-\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} = 2x - 3$$
$$x = \frac{23}{5}$$
Stąd $y = \frac{31}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.
Przydział punktów za takie rozwiązanie: **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt** Zapisanie współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$, np. $m=-\frac{1}{2}$. **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt** Zapisanie układ równań $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2} \end{cases}$ **Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt** Przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np. $-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}=2x-3$ lub $y=-\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}+\frac{17}{2}$. **Rozwiązanie pełne .... 4 pkt** Obliczenie współrzędnych punktu styczności: $\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$
Komentarz Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających. Celem zadania było sprawdzenie, czy zdający potrafią wyznaczyć współrzędne punktu styczności prostej z okręgiem, stosując metody geometrii analitycznej. Zdający, którzy wybrali I sposób rozwiązania i uzyskiwali układ równań: $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2} \end{cases}$ najczęściej rozwiązywali to zadanie z sukcesem. Niestety, błędy najczęściej pojawiały się właśnie na etapie budowania układu równań. Zdający nie potrafili zapisać współczynnika kierunkowego a prostej $y=ax+b$ prostopadłej do danej, popełniali błędy, obliczając współczynnik b. Zdarzało się również, że przy właściwie wyznaczonej prostej prostopadłej występowały błędy w rozwiązaniu układu równań, czyli w konsekwencji zdający źle wyznaczali współrzędne punktu przecięcia prostych. Podobnie w pozostałych metodach dominowały błędy w interpretacji problemu metodami geometrii analitycznej, błędy algebraiczne i rachunkowe. Tradycyjnie zadania z geometrii analitycznej należą do grupy zadań o najniższym stopniu wykonalności. Problem okręgu i stycznej był najtrudniejszym zarówno wśród zadań zamkniętych jak i wśród zadań rozszerzonej odpowiedzi. Aż 70,4% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów, a niespełna 14% zdających rozwiązało je do końca.

Zadanie 32. ***(5 pkt)***

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie zadania umieszczonego w kontekście praktycznym (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,40	0,52	0,18	0,06	0,27	0,05

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Drogę przebytą przez turystę opisujemy równaniem $x \cdot y = 112$.

Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas $(x+3)\cdot(y-12)=112$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$.

Przekształcamy go do równania kwadratowego $x^2+3x-28=0$ i otrzymujemy:

$x_1 = \frac{-3-11}{2} = -7$ sprzeczne z zał. $x>0$

$x_2 = \frac{-3+11}{2} = 4$

Obliczamy y: $y = \frac{112}{4} = 28$

Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie zależności między przebytą drogą, liczbą dni wędrówki x oraz liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę y, np.:

- $(x+3)\cdot(y-12)=112$

albo

- $x \cdot y = 112$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np. $\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$(x+3)\left(\frac{112}{x}-12\right)=112$ lub $\left(\frac{112}{y}+3\right)(y-12)=112$, lub $x\cdot(4x+12)=112$,

lub $\left(\frac{1}{4}y-3\right)\cdot y = 112$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x bezbłędnie i nieobliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę: 28 km.

Komentarz
Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających.

Bezbłędnie rozwiązało je 28,4% zdających, a prawie 43% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.

Było to zadanie wykorzystujące zależność droga – prędkość – czas. Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi poprawnie opisać tę sytuację w języku matematyki, a następnie rozwiązać odpowiednie równania i zinterpretować otrzymane wyniki. Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Tylko połowa zdających nie miała trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji. Najwięcej błędów pojawiło się na etapie zapisywania układu równań, zdający pisali np.

- $\begin{cases} x+y=112 \\ x+3=y-12 \end{cases}$

albo

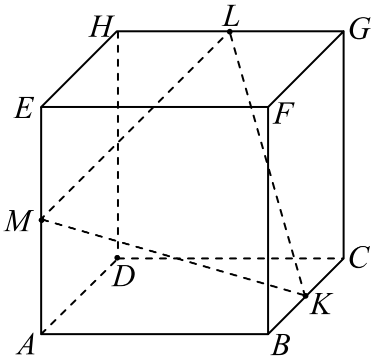
- $\begin{cases} x+y=112 \\ x+3+y-12=112 \end{cases}$

Równie często zdający zapisywali pierwsze równanie, a w drugim popełniali błąd, nie zapisując nawiasów, np. $\begin{cases} x\cdot y=112 \\ x+3\cdot y-12=112 \end{cases}$ i w dalszej części rozwiązania zadania nadal tych nawiasów nie uwzględniali.

Niestety, również nie wszyscy zdający potrafili poprawnie rozwiązać zapisany układ równań, popełniali błędy logiczne i rachunkowe.

Typowym błędem było odgadywanie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę i brak uzasadnienia, że jest to jedyne rozwiązanie. Za tak przedstawione rozwiązanie zdający mógł otrzymać jedynie 1 punkt.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***



Punkty *K, L* i *M* są środkami krawędzi *BC, GH* i *AE* sześcianu *ABCDEFGH* o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta *KLM.*

Sprawdzane umiejętności
Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,27	0,35	0,09	0,02	0,16	0,02

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Trójkąt ABK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$. Stąd $|AK|^2 = \frac{5}{4}$.

Trójkąt MAK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|MK|^2 = |MA|^2 + |AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$.

Analogicznie dla trójkątów MEL i LGK obliczamy kwadraty długości boków ML i KL: $|ML|^2 = |KL|^2 = \frac{3}{2}$.

Ponieważ $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2$, więc trójkąt KLM jest równoboczny.

Zatem jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{|MK|^2 \sqrt{3}}{4}$, stąd $P = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie kwadratu długości odcinka AK: $|AK|^2 = \frac{5}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- obliczenie kwadratów długości lub długości boków trójkąta KLM: $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2 = \frac{3}{2}$ lub $|ML| = |KL| = |MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

albo

- zauważenie, że trójkąt KLM jest równoboczny i obliczenie kwadratu długości jednego z boków tego trójkąta, np. $|MK|^2 = \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta KLM: $P = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Komentarz

Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających.
Zadanie sprawdzało umiejętność wyznaczenia związków miarowych w sześcianie.
Zdający pokonał zasadnicze trudności, gdy obliczył długość odcinka łączącego środki krawędzi sześcianu i zauważył, że trójkąt KLM jest równoboczny.
Maturzyści rzadko podejmowali próbę rozwiązania tego zadania, natomiast w występujących rozwiązaniach bardzo często pojawiały się błędy. Najczęściej zdający nie zauważali, że trójkąt KLM jest równoboczny. Obliczali tylko długość jednego boku trójkąta i na tym kończyli rozwiązanie lub obliczali długości pozostałych boków, popełniając błędy.
W niektórych rozwiązaniach można było zauważyć bardzo poważne błędy rzeczowe. Zdający przyjmowali wysokość trójkąta KLM jako wysokość sześcianu lub długość odcinka łączącego środek krawędzi sześcianu z jego wierzchołkiem jako połowę przekątnej kwadratu i zapisywali, np. $|MH| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Zadanie rozwiązało bezbłędnie tylko 18,7% zdających, natomiast aż 68,2% nie podjęło próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.

Arkusz II

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:
http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/kryteria/matematyka_model_PR.pdf

Zadanie 1. ***(4 pkt)***
Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.

Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie cech podzielności liczb całkowitych (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,30	0,33	0,04	0,11

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Przekształcamy wyrażenie $k^6-2k^4+k^2$ do postaci iloczynowej:
$k^2(k^4-2k^2+1)=k^2\left(k^2-1\right)^2=\left[\left(k-1\right)k(k+1)\right]^2$.

Wykazujemy, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 6.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Kwadrat iloczynu tych liczb jest podzielny przez 36. Zatem liczba postaci $k^6-2k^4+k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Rozwiązanie, w którym jest postęp ....1 pkt
Zapisanie liczby $n^2=k^6-2k^4+k^2$ w jednej z następujących postaci iloczynowych:
$k^2\left(k^2-1\right)^2$ lub $\left[k\left(k^2-1\right)\right]^2$ lub $\left[k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$ lub $k^2\left[\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$ lub $\left(k^3-k\right)^2$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wykazanie podzielności liczby n przez 2 albo przez 3.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt
Wykazanie podzielności liczby n przez 2 i przez 3 albo stwierdzenie, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6.
Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Wyciągnięcie wniosku o podzielności liczby n^2 przez 36.

Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Prawie 49% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu bądź za jego rozwiązanie otrzymało 0 punktów. Potwierdza to fakt, że zadania typu „wykaż” budzą obawy także wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym.
Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem liczby $k^6-2k^4+k^2$ jako iloczynu kolejnych trzech liczb całkowitych $\left[k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$. Trudności pojawiały się na etapie uzasadnienia, że liczba $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ jest podzielna przez 6.
Często popełnianym przez zdających błędem było dowodzenie prawdziwości twierdzenia dla kilku wybranych liczb parzystych, następnie nieparzystych i wnioskowanie na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb całkowitych.
Tylko 21,4% zdających poprawnie uzasadniło tezę tego zadania.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

Sprawdzane umiejętności Przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego (standard V).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,67	0,71	0,22	0,43

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Przekształcamy tezę w sposób równoważny.

Mnożymy obie strony równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ przez $(a-c)(b-c)$, otrzymując:

$a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$, czyli $ab-ac+ab-bc=2ab-2ac-2bc+2c^2$.

Stąd otrzymujemy $2c^2-ac-bc=0$, czyli $c(2c-a-b)=0$.

Ta ostatnia równość jest prawdziwa, bo z założenia $2c-a-b=0$. Zatem teza też jest prawdziwa.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ....1 pkt

Sprowadzenie lewej strony równości do wspólnego mianownika: $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Przekształcenie równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ do postaci

$a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Wykonanie działań i doprowadzenie równości do postaci np.: $2c^2-ac-bc=0$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Uzasadnienie, że $c(2c-a-b)=0$ i wnioskowanie o prawdziwości równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Niezależnie od zastosowanej metody zadanie wymagało umiejętności wykorzystania założeń do przekształcenia wyrażenia wymiernego. Prawie 13 % zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania albo nie uzyskało w nim żadnego postępu, co zazwyczaj oznaczało, że nie potrafili oni sprowadzić lewej strony równości do wspólnego mianownika. Natomiast 50,8 % zdających przeprowadziło poprawne rozumowanie, uzyskując maksymalną ilość punktów za przedstawione rozwiązanie.

Zdający najczęściej stosowali I i II sposób rozwiązania zaprezentowany w *Kryteriach oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE. Sporadycznie pojawiały się rozwiązania, w których zdający zauważali, że liczby a, c, b tworzą ciąg arytmetyczny. Pojawiły się też rozwiązania, w których zdający wykazywali prawdziwość tezy dla $c=0$, a następnie wykazywali, że dla $c \neq 0$ spełniona jest równość $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a+b}{c}$.

Zaskoczeniem był fakt, że do najczęściej popełnianych błędów należały te związane z elementarnymi umiejętnościami (kształconymi już na poziomie podstawowym), np.:

- niepoprawne przekształcania lewej strony równości – sprowadzenie do wspólnego mianownika, np.

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a+b}{(a-c)(b-c)} \quad \text{albo} \quad \frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{a}-\frac{a}{c}+\frac{b}{b}-\frac{b}{c}=\frac{2-a-b}{c}$$

- niepoprawne skracanie ułamków, np. $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=-\frac{1}{c}-\frac{1}{c}=-\frac{2}{c}$.

Zdający, którzy pokonali zasadnicze trudności zadania i doprowadzili równość do postaci $2c^2-ac-bc=0$, często popełniali błąd, dzieląc obie strony równości przez *c*, bez założenia, co skutkowało otrzymaniem 3 punktów z 4 możliwe do uzyskania za rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 3. ***(6 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,51	0,56	0,05	0,22

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Zapisujemy warunki, jakie muszą być spełnione, aby równanie

$x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ posiadało dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$:

$$\begin{cases}\Delta>0\\(x_1-x_2)^2<8(m+1)\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$.

$16m^2-4(-m^3+6m^2+m-2)>0$

$m^3-2m^2-m+2>0$

$(m+1)(m-1)(m-2)>0$.

Zatem $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Rozwiązujemy nierówność $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$, korzystając ze wzorów Viète'a.

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<8m+8$

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2<8m+8$. Ponieważ $x_1+x_2=4m$ oraz $x_1\cdot x_2=-m^3+6m^2+m-2$, więc

$(4m)^2-4(-m^3+6m^2+m-2)<8m+8$.

Przekształcamy tę nierówność do postaci $4m^3-8m^2-12m<0$

stąd $4m(m-3)(m+1)<0$.

Rozwiązaniem nierówności jest

$m\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$.

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów rozwiązań nierówności:

$\Delta>0$ i $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

Stąd $m\in(0,1)\cup(2,3)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Pierwszy etap rozwiązania polegał na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymywał **1 punkt**.

Drugi etap polegał na rozwiązaniu nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymywał **4 punkty**.

Trzeci etap polegał na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego: $m \in (0,1) \cup (2,3)$. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymywał **1 punkt,** gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) była rozwiązana poprawnie.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

- **1 punkt** zdający otrzymywał za zapisanie wyrażenia $(x_1 - x_2)^2$ w postaci $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ lub $\frac{\Delta}{a^2}$.
- **3 punkty** zdający otrzymywał za zapisanie nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ w postaci nierówności trzeciego stopnia z jedną niewiadomą *m*, np. $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$.
- **4 punkty** zdający otrzymywał za rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia: $m \in (-\infty, -1) \cup (0,3)$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować i zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. W schemacie oceniania tego zadania opisano dwie metody rozwiązania, różniące się sposobem rozwiązywania nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$. Zazwyczaj zdający przekształcali tę nierówność, wykorzystując wzory Viète'a, ale pojawiały się także rozwiązania, w których zdający wyznaczali pierwiastki x_1, x_2, a następnie kwadrat ich różnicy $(x_1 - x_2)^2 = \left(-2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}\right)^2$ i zapisywali odpowiednią nierówność.

Tylko 26,1 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 29,4% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.
Mimo iż ten rodzaj zadań pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, niektórzy zdający nie pamiętali o sprawdzeniu warunku, kiedy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania. Wielu zdających nie potrafiło rozwiązać nierówności $\Delta > 0$, czyli równania wielomianowego trzeciego stopnia.
Jednak najwięcej błędów maturzyści popełnili podczas doprowadzenia nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ do postaci nierówności z jedną niewiadomą *m*. Niektórzy zdający:

- nie potrafili zastosować wzorów skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $(x_1 - x_2)^2$, np. $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- popełniali błędy podczas stosowania wzorów Viète'a, np. $x_1 + x_2 = \frac{4m}{2}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{-m^3 + 6m^2 + m - 2}{2}$
- niepoprawnie rozwiązywali nierówność $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$, np.
  $4m(m^2 - 2m - 3) < 0$
  $4m < 0$ i $m^2 - 2m - 3 < 0$
  $m \in (-1, 0)$

- popełniali błędy nieuwagi, np. $x_1 + x_2 = 4$ i błędy rachunkowe, np.

$$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} - \frac{4m + 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} = 4m .$$

Zaskakiwały błędy związane z wyznaczeniem części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego, np.: $m \in (-1,1) \cup (2,+\infty)$ i $m \in (-\infty,-1) \cup (0,3)$, czyli $m \in (2,3)$.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązanie równania trygonometrycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,42	0,47	0,00	0,17

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Wyłączamy przed nawias $2\sin^2 x$:

$2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$

i zapisujemy równanie w postaci iloczynowej:

$2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$,

$(2\sin^2 x - 1)(1 - \cos x) = 0$.

Zatem $2\sin^2 x - 1 = 0$ lub $1 - \cos x = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos x = 1$

$x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ $\quad$ lub $\quad$ $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ $\quad$ lub $\quad$ $x = 0$ lub $x = 2\pi$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ są:

$x = 0$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ lub $x = 2\pi$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie równania w postaci, np.

$2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$ lub $2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$,

lub $(2\sin^2 x - 1) - \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$
- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lub $\cos x = 1$
- $\cos 2x = 0$ lub $\cos x = 1$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w podanym przedziale: $x=0$, $x=\frac{1}{4}\pi$, $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$, $x=\frac{7}{4}\pi$, $x=2\pi$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających trudne.
Mimo iż ten typ zadania pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, tylko 25 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie i aż 38,2% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.
Zdający na ogół przekształcali równanie $2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x=1-\cos x$ do postaci iloczynowej: $(2\sin^2 x-1)(1-\cos x)=0$ lub $(2\cos^2 x-1)(\cos x-1)=0$, a następnie rozwiązywali elementarne równania trygonometryczne. W wielu wypadkach trudność sprawiało zdającym rozwiązanie tych równań i zapisanie ich rozwiązań we wskazanym przedziale.

Najczęściej popełniane błędy przez zdających w rozwiązaniach tego zadania to:

- dzielenie obu stron równania $2\sin^2 x(1-\cos x)=1-\cos x$ przez $1-\cos x$ bez odpowiedniego założenia i rozwiązanie tylko równania $2\sin^2 x-1=0$ albo równania $2\cos^2 x-1=0$,
- nieuwzględnianie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x-1=0$ albo $2\cos^2 x-1=0$ i ograniczanie się do zapisywania np. tylko rozwiązań równania $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ albo $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- podawanie rozwiązań w postaci ogólnej, np. $x=\frac{1}{4}\pi+2k\pi$, $x=2k\pi$,
- błędy rachunkowe związane z przekształcaniem i rozwiązaniem równania trzeciego stopnia z niewiadomą $\cos x$.

Zadanie 5. ***(4 pkt)***
O ciągu (x_n) dla $n\geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=3^{x_n}$ dla $n\geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q=27$.

b) $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=145$.

Oblicz x_1.

Sprawdzane umiejętności
Zastosowanie własności ciągu geometrycznego, wzorów na n-ty wyraz tego ciągu i na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,42	0,45	0,14	0,21

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równość: $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}}=3^{x_{n+1}-x_n}$.

Zatem $27=3^{x_{n+1}-x_n}$. Stąd $x_{n+1}-x_n=3$ dla $n\geq 1$.

Zauważamy, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej n: $x_{n+1}-x_n=3$, to ciąg (x_n) jest arytmetyczny o różnicy $r=3$.
Z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + (x_1 + r) + \ldots + (x_1 + 9r) = 145 \\ r = 3 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ do postaci: $\begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases}$ i podstawiamy $r = 3$ do pierwszego równania. Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą: $10x_1 + 135 = 145$. Stąd $x_1 = 1$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie odpowiedniego równania, np. $27 = 3^{x_{n+1} - x_n}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie zależności między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu (x_n): $x_{n+1} - x_n = 3$ (wystarczy zapis, np. $x_2 - x_1 = 3$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie układu równań

$\begin{cases} x_1 + (x_1 + r) + \ldots + (x_1 + 9r) = 145 \\ r = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} \dfrac{2x_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 145 \\ r = 3 \end{cases}$, lub $\begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases}$,

lub równania $x_1 + (x_1 + 3) + \ldots + (x_1 + 27) = 145$ i przekształcenie do równania w postaci, np.: $10x_1 + 135 = 145$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie x_1: $x_1 = 1$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Aby go rozwiązać, należało dokonać uważnej analizy informacji o obu ciągach i dobrać odpowiednią strategię rozwiązania. Niestety, prawie 50,3% zdających nie potrafiło dokonać żadnego postępu na drodze do rozwiązania zadania, mimo iż wystarczało zastosować wiadomości i umiejętności z zakresu podstawowego. Możliwe, że sposób zapisania ciągu (a_n) za pomocą ciągu (x_n) spowodował, że wielu zdających nie poradziło sobie z rozwiązaniem problemu. Ponadto zdający bardzo często popełniali błędy rachunkowe lub niepoprawnie przekształcali wyrażenia algebraiczne.

Jednocześnie warto zauważyć, że aż 35% maturzystów rozwiązało to zadanie bezbłędnie.

Zadanie 6. *(4 pkt)*

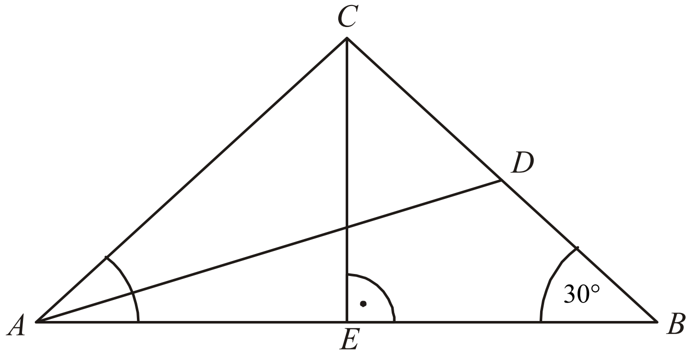
Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Sprawdzane umiejętności

Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,57	0,61	0,14	0,32

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania



Z treści zadania wynika, że $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$ i $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$ oraz $|BE| = 4$.

Z trójkąta prostokątnego *BEC* otrzymujemy: $\cos 30^\circ = \frac{|BE|}{|BC|}$.

Zatem $\frac{4}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ i $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy $|AD|$, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta *ABD*.

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos\sphericalangle ABD$,

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$|AD|^2 = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{16 \cdot 7}{3}$.

Stąd $|AD| = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i obliczenie długości odcinka *BC* lub *CE*:

$|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ lub $|CE| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABD*:

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ$

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej *AD*: $|AD| = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.

Maturzyści, w większości, nieźle poradzili sobie z ustaleniem zależności między podanymi w zadaniu informacjami. Wykazali się przy tym umiejętnością zaplanowania kolejności

wykonywanych obliczeń oraz prawidłowym dobieraniem twierdzeń z zakresu geometrii, które były potrzebne do rozwiązania problemu. Zasadnicze trudności zadania pokonało 52% zadających, z tego 35,4% rozwiązało zadanie bezbłędnie. Zaskakiwały błędy związane z nieznajomością pojęcia środkowej trójkąta. Część zdających uważała, że jest to dwusieczna kąta BAC, inni, że wysokość poprowadzona do ramienia BC. Byli też i tacy, którzy pod pojęciem środkowej trójkąta rozumieli odcinek łączący wierzchołek A trójkąta z punktem D – środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wśród błędów, które popełniali zdający, przeważały jednak błędy rachunkowe popełniane w trakcie obliczeń (działania na ułamkach zwykłych, działania na liczbach niewymiernych, pierwiastkowanie wyrażeń algebraicznych).

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

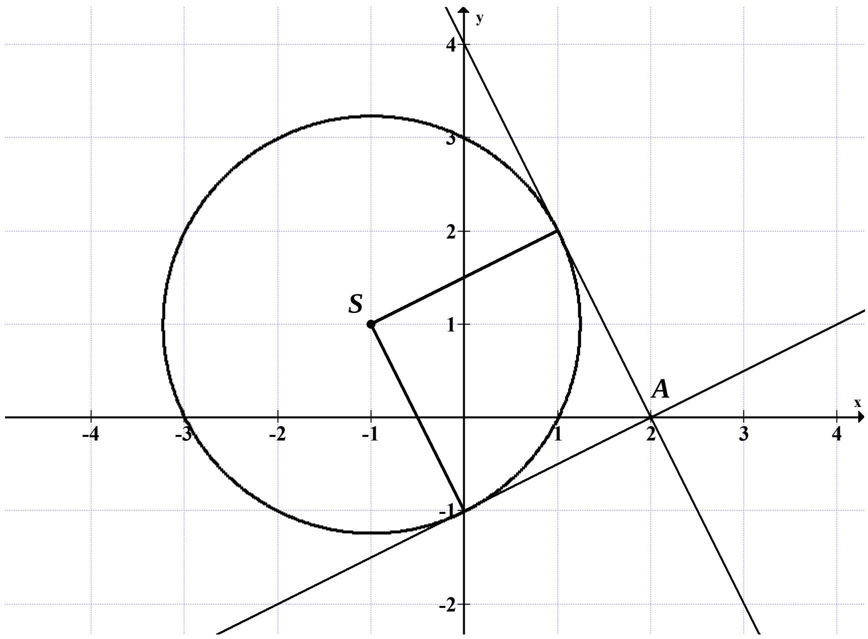
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ poprowadzonymi przez punkt $A=(2,0)$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,40	0,43	0,06	0,20

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x=2$ nie jest styczna do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ (odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia). Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A=(2,0)$:

$y=a(x-2)$ lub $y=ax-2a$ w zależności od parametru a (gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej).

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-3=0 \\ y=ax-2a \end{cases}$ i doprowadzamy do równania kwadratowego z niewiadomą x, np. $x^2+(ax-2a)^2+2x-2(ax-2a)-3=0$

Prosta $y=ax-2a$ jest styczna do okręgu wtedy, gdy układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli gdy równanie kwadratowe $x^2+(ax-2a)^2+2x-2(ax-2a)-3=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przekształcamy równanie

$x^2+a^2x^2-4a^2x+4a^2+2x-2ax+4a-3=0$,
$x^2\left(1+a^2\right)+x\left(-4a^2-2a+2\right)+4a^2+4a-3=0$.

Zapisujemy warunek na to, aby równanie $x^2\left(1+a^2\right)+x\left(-4a^2-2a+2\right)+4a^2+4a-3=0$ miało jedno rozwiązanie: $\Delta=0$.

Zatem $\left(-4a^2-2a+2\right)^2-4\cdot\left(1+a^2\right)\cdot\left(4a^2+4a-3\right)=0$.

$4\left(2a^2+a-1\right)^2-4\cdot\left(1+a^2\right)\cdot\left(4a^2+4a-3\right)=0$

Stąd $2a^2+3a-2=0$.

Rozwiązujemy równanie $2a^2+3a-2=0$:

$\Delta=25$

$a_1=-2$ lub $a_2=\frac{1}{2}$.

Z tego, że a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1\cdot a_2=-1$ wynika, że styczne są do siebie prostopadłe. Stąd miara kąta między stycznymi jest równa $90°$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt

Zapisanie równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkt $A=(2,0)$ w postaci, np.:

$y=a\left(x-2\right)$ lub $y=ax-2a$, lub $ax-y-2a=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases}x^2+y^2+2x-2y-3=0\\ y=ax-2a\end{cases}$ i doprowadzenie do równania kwadratowego z niewiadomą *x*, gdzie *a* jest parametrem, np.

$x^2\left(1+a^2\right)+x\left(-4a^2-2a+2\right)+4a^2+4a-3=0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....3 pkt

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie wartości parametru *a*, dla których równanie ma jedno rozwiązanie i zapisanie, że dla tych wartości *a* proste styczne są prostopadłe.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Prawie 47% zadających nie potrafiło dobrać odpowiedniej strategii rozwiązania postawionego w zadaniu problemu. Zadania z geometrii analitycznej, w szczególności związane z pojęciem stycznej do okręgu, okazały się dla tegorocznych maturzystów szczególnie trudne, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym. Zdający nie potrafili zapisać równania kierunkowego prostej przechodzącej przez dany punkt, błędnie wyznaczali współrzędne środka okręgu i jego promień, niepoprawnie stosowali wzór na odległość punktu od prostej. Pojawiały się też liczne błędy rachunkowe i niepoprawne przekształcenia algebraiczne.

Niektórzy zdający rozstrzygali problem, wykonując poprawny rysunek w układzie współrzędnych i na tej podstawie stwierdzając, że styczne są prostopadłe. W przypadku takich rozwiązań zazwyczaj brakowało uzasadnienia stwierdzonego faktu. Warto podkreślić, że uczniowie, którzy poprawnie rozwiązali problem (31,3%), stosowali różne metody rozwiązania i skutecznie operowali wiedzą i umiejętnościami z zakresu geometrii analitycznej

Zadanie 8. *(4 pkt)*
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w graniastosłupie, wyznaczenie największej wartości funkcji (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,55	0,59	0,19	0,30

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa, h – długość krawędzi bocznej graniastosłupa.
Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 24, mamy zatem $12a+6h=24$.
Wyznaczamy h: $h=4-2a$.
Pole P powierzchni bocznej jest równe $P=6ah$ dla $a\in(0,2)$ oraz $h\in(0,4)$.

Aby wyznaczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe, zapisujemy funkcję P w zależności od zmiennej a

$$P(a)=6a(4-2a),\ P(a)=-12a^2+24a.$$

Pole P ma największą wartość, gdy $a=1$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie, że $12a+6h=24$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zapisanie pola P powierzchni bocznej graniastosłupa oraz wyznaczenie a lub h w zależności od jednej zmiennej, np.:

$P=6ah$ oraz $a=2-\frac{h}{2}$ lub $h=4-2a$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zapisanie pola powierzchni bocznej w zależności od jednej zmiennej:

$P(a)=6a(4-2a)$ lub $P(h)=6h\left(2-\frac{h}{2}\right)$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Obliczenie długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe: $a=1$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.
Ponad połowa zdających pokonała zasadnicze trudności tego zadania i potrafiła dostrzec, że rozwiązanie zadania wiąże się z problemem optymalizacji funkcji kwadratowej. Bezbłędnie rozwiązało ten problem ponad 39,4% maturzystów.
Podczas rozwiązywania zadania zdający popełniali różnorodne błędy, np.;

- niepoprawnie interpretowali bryłę – pojawiały się rozwiązania problemu np. dla graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,
- źle zliczali krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego,
- niepoprawnie zapisywali wzór na powierzchnię boczną graniastosłupa.

Aż 23,8% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania lub za rozwiązanie uzyskało 0 punktów.

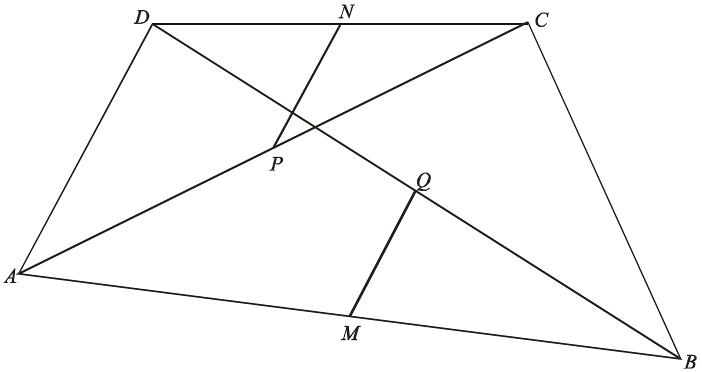
Zadanie 9. ***(4 pkt)***
Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

<table>
<tr><td colspan="4">Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (standard IV).</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</th><th colspan="3">Wskaźnik łatwości zadania</th></tr>
<tr><th>LO</th><th>LP</th><th>T</th></tr>
<tr><td>0,17</td><td>0,18</td><td>0,06</td><td>0,07</td></tr>
<tr><td colspan="4">Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Wybieramy miejsce dla dwójek. Jest $\binom{8}{2}=28$ takich miejsc.
Wybieramy miejsce dla trójek. Jest $\binom{6}{3}=20$ takich miejsc.
Na pozostałych trzech miejscach mogą wystąpić cyfry: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jest 7^3 ciągów trójelementowych ze zbioru siedmioelementowego.
Zatem jest $28\cdot 20\cdot 7^3=192080$ liczb spełniających warunki zadania.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki albo obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki, albo obliczenie na ile sposobów można zapełnić trzy pozostałe miejsca.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie obu wielkości: liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie liczby ciągów na pozostałych miejscach, skorzystanie z reguły mnożenia i obliczenie, że jest 192080 szukanych liczb.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających bardzo trudne.
Aż 57,9% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania lub za rozwiązanie uzyskało 0 punktów. Oznacza to, że nie potrafili oni dobrać odpowiedniej strategii rozwiązania tego problemu kombinatorycznego. Najczęściej zdający popełniali błędy podczas obliczania liczby miejsc, na których mogły znajdować się dwójki lub trójki lub nie uwzględniali założeń zadania – liczba ośmiocyfrowa, w zapisie której nie występuje zero. Stąd rozwiązania: $\binom{8}{2}\cdot 7^3\cdot 3!$ albo $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot 8^3$ albo $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 7^3$. Pojawiały się także błędy rachunkowe, a niektórzy zdający nie umieli zastosować reguły mnożenia i zapisywali $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot 7^3$.
Tylko 6,2% zdających bezbłędnie rozwiązało przedstawiony w zadaniu problem.</td></tr>
</table>

Zadanie 10. ***(3 pkt)***
Dany jest czworokąt wypukły *ABCD* niebędący równoległobokiem. Punkty *M*, *N* są odpowiednio środkami boków *AB* i *CD*. Punkty *P*, *Q* są odpowiednio środkami przekątnych *AC* i *BD*. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich (standard V).			
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**		
	LO	**LP**	**T**
0,15	0,17	0,06	0,05

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Ponieważ punkty *N* i *P* są środkami boków *DC* i *AC* trójkąta *ADC*, więc $NP \parallel AD$.
Punkty *M* i *Q* są środkami boków *AB* i *DB* trójkąta *ABD*, więc $MQ \parallel AD$.
Zatem $NP \parallel MQ$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zapisanie, że: $NP \parallel AD$ lub $MQ \parallel AD$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt
Zapisanie i uzasadnienie, że $NP \parallel AD$ oraz $MQ \parallel AD$.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt
Zapisanie wniosku, że $NP \parallel MQ$.

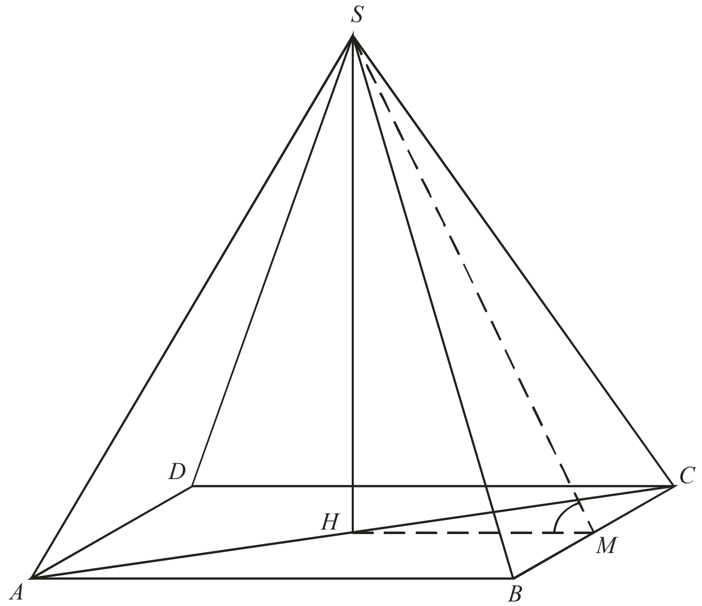
Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających bardzo trudne i było najtrudniejszym w tym zestawie egzaminacyjnym.
Badało umiejętność przeprowadzenia rozumowania opartego na znajomości związków miarowych w figurach płaskich. Do jego rozwiązania wystarczyła znajomość podstawowych twierdzeń z planimetrii. Tylko 14,2% zdających, wykorzystując informacje o odcinku łączącym środki boków w trójkącie, potrafiło uzasadnić, że odpowiednie odcinki są równoległe. Natomiast aż 84% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania lub za rozwiązanie uzyskało 0 punktów.

Zadanie 11. ***(6 pkt)***
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS* o podstawie *ABCD*. W trójkącie równoramiennym *ASC* stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,62	0,66	0,25	0,43

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Wprowadzamy oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = 5x$. Ponieważ $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$ stąd $|AH| = 3x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CHS otrzymujemy: $|SH| = \sqrt{|CS|^2 - |HC|^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x$.

Ponieważ $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$, stąd $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$.

Zatem $|CM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x}{\sqrt{2}} = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MCS otrzymujemy $|SM|^2 = |CS|^2 - |CM|^2$.

Stąd $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{50-9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2}$, $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$.

Zatem $\sin\alpha = \frac{|SH|}{|SM|} = \frac{4x}{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wyznaczenie $|AH| = 3x$ i $|SH| = 4x$ przy przyjętych oznaczeniach, np.: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = |CS| = 5x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....3 pkt

Wyznaczenie długości BC: $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ lub $|BC| = 3x\sqrt{2}$ i wyznaczenie długości CM:

$|CM| = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$ lub $|CM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Wyznaczenie długości *SM*: $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$ lub $|SM| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Wyznaczenie sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.

Zdający stosowali różne metody rozwiązania tego zadania, a wyniki świadczą, że dobrze opanowali podstawowe wiadomości i umiejętności z zakresu stereometrii. Prawie 43% zdających rozwiązało to zadanie do końca, a 61% pokonało jego zasadnicze trudności. W rozwiązaniach najczęściej pojawiały się błędy rachunkowe lub błędy nieuwagi, np. $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{40}{2}x^2} = \frac{\sqrt{80}}{2}x^2$.

Niestety, zdający popełniali błędy także na etapie analizy zadania, aż 19,8% zdających otrzymało 0 punktów za przedstawione rozwiązanie bądź nie podjęło próby rozwiązania przedstawionego problemu.

Zadanie 12. ***(3 pkt)***

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \le 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).

Sprawdzane umiejętności

Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania		
	LO	LP	T
0,46	0,48	0,28	0,34

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Wiemy, że $A \cup B = (A \cap B') \cup B$ i $(A \cap B') \cap B = \varnothing$ oraz $P(A \cup B) \le 1$.

Mamy więc: $1 \ge P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B)$, stąd $P(A \cap B') \le 0,3$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie, że $A \cup B = (A \cap B') \cup B$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zapisanie, że $(A \cap B') \cap B = \varnothing$ oraz, że $P(A \cup B) \le 1$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt Zapisanie wniosku: $P(A \cap B') \le 0,3$.
Komentarz Zadanie okazało się dla zdających trudne. Tylko 23,3% zdających rozwiązało to zadanie do końca. W większości (61,3%) próby rozwiązania problemu kończyły się na obliczeniu $P(B') = 0,3$, za co zdający mógł uzyskać tylko 1 punkt. Dalsze etapy rozwiązania prowadziły zazwyczaj do błędnych lub nieuzasadnionych wniosków. Dostrzeżenie faktu, że $A \cap B' \subset B'$ i wyciągnięcie wniosku dotyczącego prawdopodobieństw tych zdarzeń przekraczało możliwości zdecydowanej większości zdających, o czym świadczy współczynnik łatwości zadania. Prawie 12,7% zdających otrzymało 0 punktów za przedstawione rozwiązanie bądź nie podjęło próby rozwiązania przedstawionego problemu.

Wnioski wynikające z analizy jakościowej zadań

Egzamin pokazał, że maturzyści dobrze opanowali podstawowe wiadomości i umiejętności z zakresu poziomu podstawowego i potrafili zastosować odpowiednie algorytmy w zadaniach, które pojawiały się już na egzaminach maturalnych. Nadal jednak problemem są zadania nieschematyczne, wymagające umiejętności modelowania, doboru strategii czy też przeprowadzenia rozumowania. Dlatego w pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń. Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami, przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2012, warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.