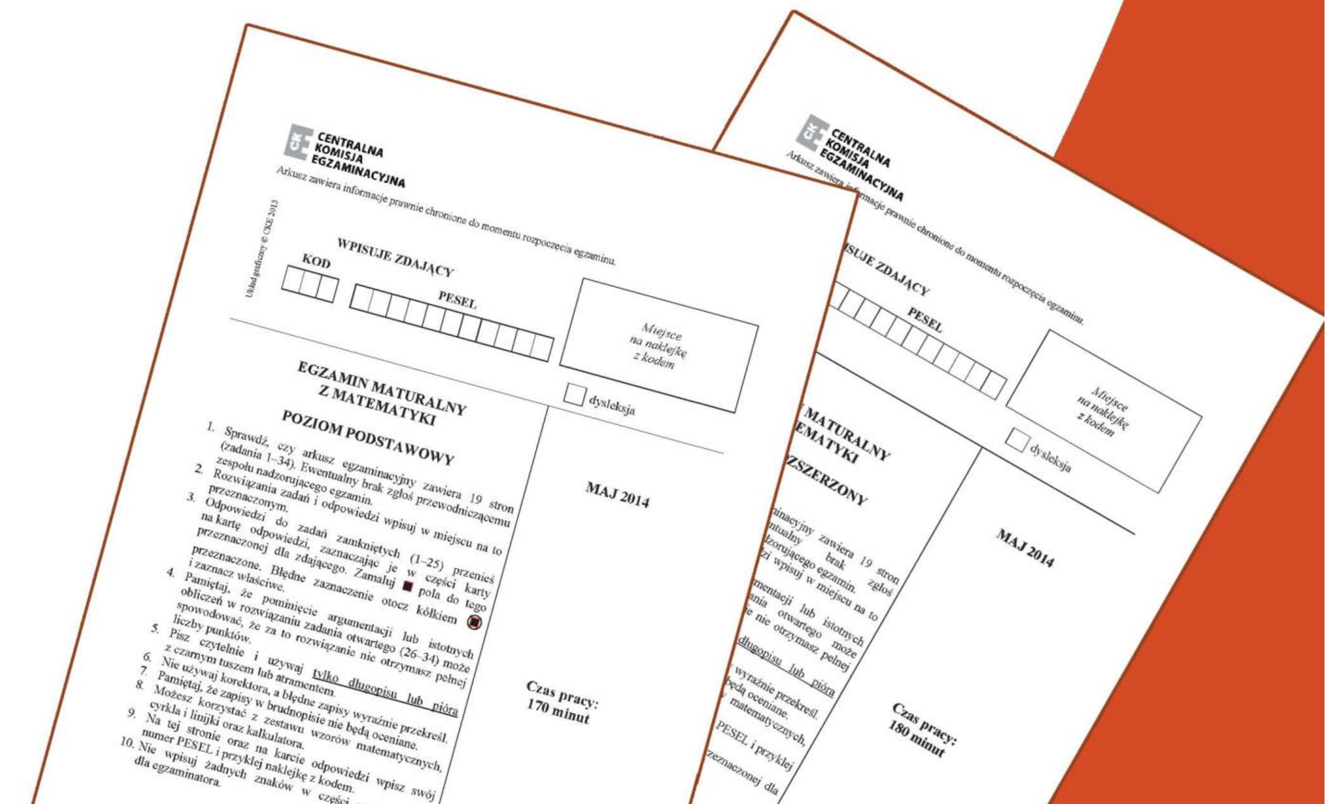
Sprawozdanie
z egzaminu maturalnego 2014

Matematyka



Opracowanie
Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Siwik (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży)
Henryk Dąbrowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
dr Marcin Smolik (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Bartosz Kowalewski (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Wydziały Badań i Analiz okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa śląskiego
Krzysztof Słomczyński (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie)
dr Romana Patyk (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie)

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99, 32 616 28 14
e-mail: oke@oke.jaworzno.pl
www.oke.jaworzno.pl

Spis treści

Poziom podstawowy

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej odpowiedzi i 3 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności w pięciu obszarach: wykorzystanie i tworzenie informacji (2 zadania zamknięte, jedno otwarte krótkiej odpowiedzi), wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (16 zadań zamkniętych, jedno otwarte krótkiej odpowiedzi), modelowanie matematyczne (3 zadania zamknięte, jedno otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno otwarte rozszerzonej odpowiedzi), użycie i tworzenie strategii (2 zadania zamknięte, jedno otwarte krótkiej odpowiedzi i 2 otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz rozumowanie i argumentacja (jedno zadanie zamknięte i 2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów (po jednym punkcie za każde zadanie zamknięte, po 2 punkty za każde zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi oraz po 4 punkty za każde z dwóch zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi w obszarze użycie i tworzenie strategii i 5 punktów za zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi z modelowania matematycznego).

2. Dane dotyczące populacji zdających w województwie śląskim

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym

Liczba zdających		**32 749**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu w wersji standardowej	z liceów ogólnokształcących	20 217
	z liceów profilowanych	417
	z techników	11 747
	z liceów uzupełniających	129
	z techników uzupełniających	239
	ze szkół na wsi	784
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1738
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	11591
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	18636
	ze szkół publicznych	30314
	ze szkół niepublicznych	2435
	kobiety	17 678
	mężczyźni	15 071
	bez dysfunkcji	30745
	z dysleksją rozwojową	2004

Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 5 osób − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	14
	słabowidzący	45
	niewidomi	3
	słabosłyszący	46
	niesłyszący	32
	Ogółem	**140**

Do egzaminu przystąpili również absolwenci z lat ubiegłych, którzy dotychczas nie uzyskali świadectwa dojrzałości, oraz tacy, którzy uzyskali świadectwo dojrzałości we wcześniejszych latach, a w 2014 r. przystąpili ponownie do egzaminu maturalnego w celu podwyższenia wyniku egzaminacyjnego.

3. Przebieg egzaminu w województwie śląskim

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

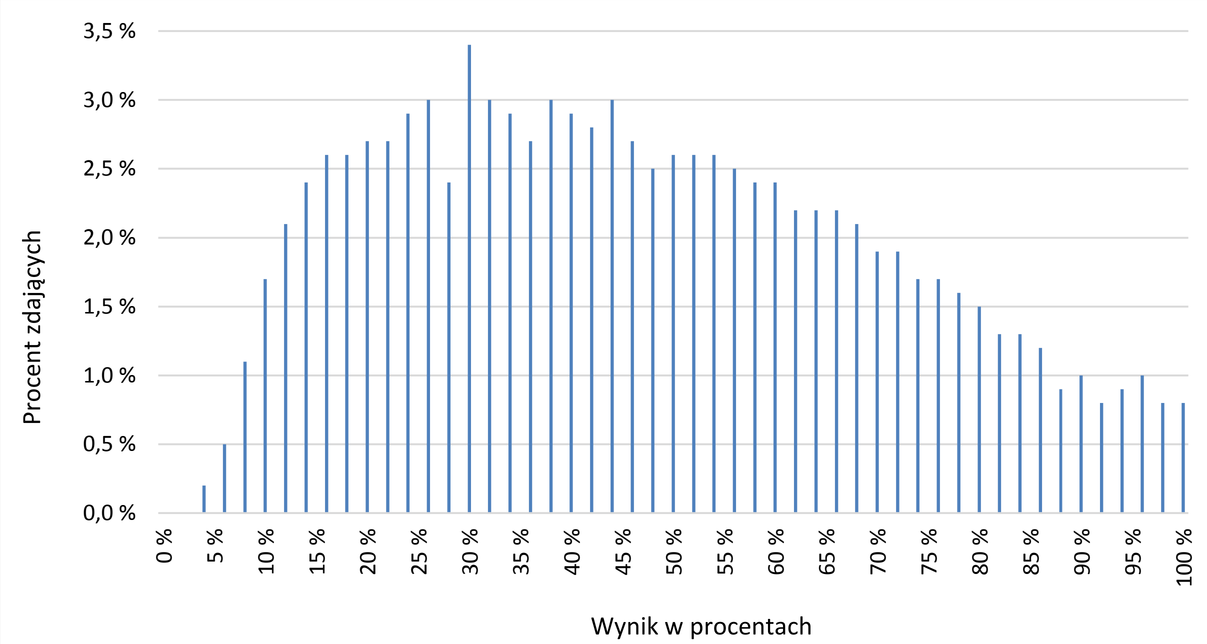
Termin egzaminu			6 maja 2014 r.
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			170 minut
Liczba szkół			714
Liczba zespołów egzaminatorów*			45
Liczba egzaminatorów*			1048
Liczba obserwatorów[1] (§ 143)			18
Liczba unieważnień[1]	w przypadku:		
	§ 99 ust. 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
		wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	2
		zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym	0
	§ 99 ust. 2	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	§ 146 ust. 3	stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu	2
Liczba wglądów[1] (§ 107)			291

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, ze zm.)

4. Podstawowe dane statystyczne dla wyników w województwie śląskim

Wyniki zdających



Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający:	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
ogółem	32 749	0	100	45	30	47	24	75
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	20 217	0	100	54	54	53	24	83
z liceów profilowanych	417	2	98	24	24	27	15	40
z techników	11 747	4	100	34	30	38	19	64
z liceów uzupełniających	129	0	72	16	12	20	12	19
z techników uzupełniających	239	2	62	14	12	16	9	11

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

Poziom wykonania zadań

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Obszar standardów	Sprawdzana umiejętność	Poziom wykonania zadania (%)	
			kraj	**woj.**
1.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi	65	65
2.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie pojęcia procentu w obliczeniach	57	58
3.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia	63	61
4.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajomość definicji logarytmu	49	47
5.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie prostych równań wymiernych	66	64
6.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej	56	55
7.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie zadań prowadzących do badania funkcji kwadratowej	67	67
8.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych	70	70
9.	Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej	59	58
10.	Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji kwadratowej	78	78
11.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym	64	64
12.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności figur podobnych w zadaniach	23	21
13.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie, czy dany ciąg jest geometryczny	80	80
14.	Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	69	69
15.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	57	56
16.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, w tym z zastosowaniem trygonometrii	69	69
17.	Użycie i tworzenie strategii	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich	66	65

Nr zad.	Obszar standardów	Sprawdzana umiejętność	Poziom wykonania zadania (%)	
			kraj	**woj.**
18.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej	48	46
19.	Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach	78	78
20.	Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych	70	70
21.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym oraz stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych	87	88
22.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym	24	23
23.	Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń	48	46
24.	Użycie i tworzenie strategii	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych	26	24
25.	Modelowanie matematyczne	Obliczanie mediany danych	56	56
26.	Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej	53	53
27.	Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązywanie równań wielomianowych metodą rozkładu na czynniki	65	65
28.	Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia	8	7
29.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji jej własności; szkicowanie na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ wykresów funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x-a)$, $y=f(x)+a$, $y=f(x)-a$	28	27
30.	Modelowanie matematyczne	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych; stosowanie twierdzenia znanego jako *klasyczna definicja prawdopodobieństwa* do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń	54	55
31.	Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego, z wykorzystaniem związków miarowych w figurach płaskich	22	21
32.	Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach	44	42
33.	Modelowanie matematyczne	Rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym prowadzących do równań kwadratowych	13	12
34.	Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie własności figur podobnych w zadaniach	46	46

Poziom rozszerzony

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 11 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej i 5 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności w czterech obszarach: wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (3 zadania krótkiej odpowiedzi i jedno rozszerzonej odpowiedzi), modelowanie matematyczne (3 zadania rozszerzonej odpowiedzi), użycie i tworzenie strategii (jedno zadanie krótkiej odpowiedzi i jedno rozszerzonej odpowiedzi) oraz rozumowanie i argumentacja (2 zadania krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających w województwie śląskim

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym

Liczba zdających		**5196**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu w wersji standardowej	z liceów ogólnokształcących	4296
	z liceów profilowanych	2
	z techników	897
	z liceów uzupełniających	1
	z techników uzupełniających	0
	ze szkół na wsi	78
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	171
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	1810
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	3137
	ze szkół publicznych	5036
	ze szkół niepublicznych	160
	kobiety	1987
	mężczyźni	3209

Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 5 osób – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	3
	słabowidzący	5
	niewidomi	0
	słabosłyszący	3
	niesłyszący	2
	Ogółem	**13**

Do egzaminu przystąpili również absolwenci z lat ubiegłych, którzy dotychczas nie uzyskali świadectwa dojrzałości, oraz tacy, którzy uzyskali świadectwo dojrzałości we wcześniejszych latach, a w 2014 r. przystąpili ponownie do egzaminu maturalnego w celu podwyższenia wyniku egzaminacyjnego albo uzyskania wyniku z matematyki jako nowego przedmiotu.

3. Przebieg egzaminu w województwie śląskim

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

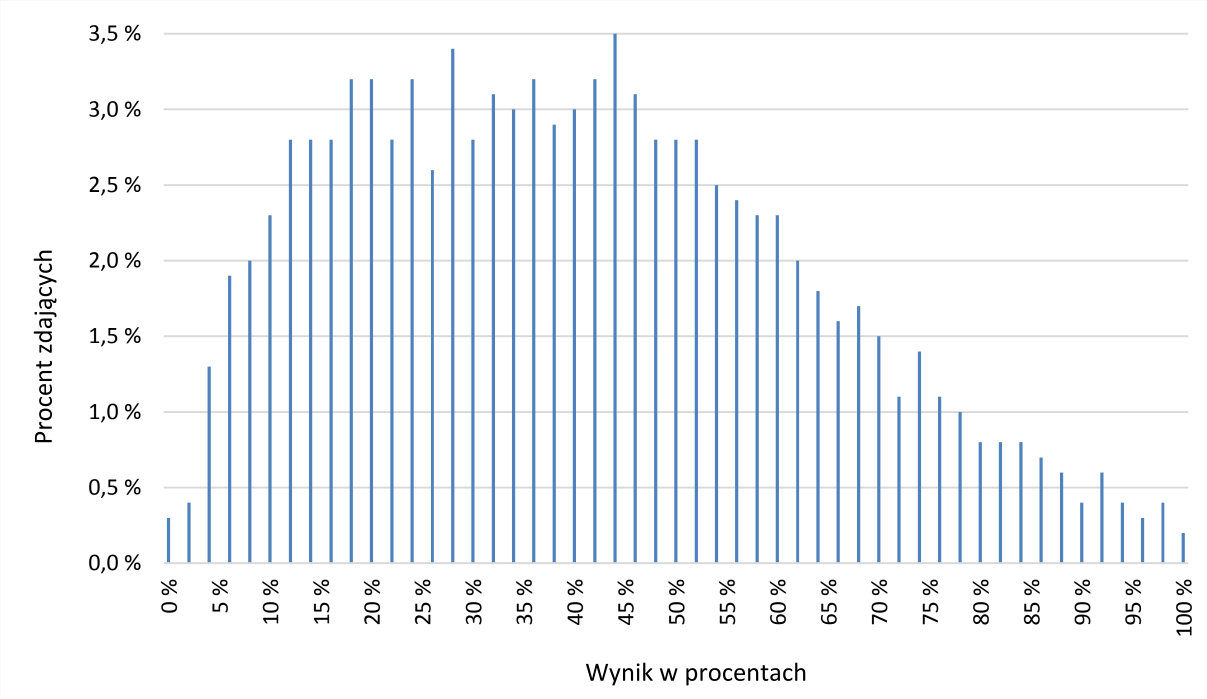
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>9 maja 2014 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>180 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>328</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów*</td><td>45</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów*</td><td>1048</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[1] (§ 143)</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Liczba unieważnień[1]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">§ 99 ust. 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 99 ust. 2</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 146 ust. 3</td><td>stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[1] (§ 107)</td><td>42</td></tr>
</table>

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, z późn. zm.)

4. Podstawowe dane statystyczne dla wyników w województwie śląskim

Wyniki zdających



Wykres 2. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne

Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
5196	0	100	39	44	41	23

Poziom wykonania zadań

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Obszar standardów	Sprawdzana umiejętność	Poziom wykonania zadania (%)	
			kraj	**woj.**
1.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej. Sporządzanie wykresu, odczytywanie własności i rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym związanych z proporcjonalnością odwrotną.	59	58
2.	Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań (również umieszczonych w kontekście praktycznym), prowadzących do badania funkcji kwadratowej. Obliczanie odległości punktu od prostej.	53	51
3.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych.	30	27
4.	Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu twierdzenia związanego z działaniami na wyrażeniach wymiernych: dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem wyrażeń wymiernych, skracaniem, rozszerzaniem wyrażeń wymiernych.	37	37
5.	Modelowanie matematyczne	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym.	37	37
6.	Rozumowanie i argumentacja	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Korzystanie ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu.	41	41
7.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Stosowanie wzorów na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.	19	19
8.	Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań dotyczących wzajemnego położenia prostej i okręgu.	47	46
9.	Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii.	48	46
10.	Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.	42	43
11.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa i stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.	48	46

Komentarz do wyników ogólnopolskich

UMIEJĘTNOŚCI OPANOWANE NAJLEPIEJ

Wyniki tegorocznej matury potwierdziły, że zdający na ogół nie mają problemów z bezpośrednim stosowaniem definicji w prostych sytuacjach. Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu dla poziomu podstawowego okazało się zadanie 21. (poziom wykonania zadania – 87%), badające umiejętność obliczania potęgi o wykładniku wymiernym oraz stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. Aby bezbłędnie rozwiązać zadanie, należało ustalić sposób obliczenia wartości wyrażenia, w którym występuje kilka potęg, a w szczególności ustalić kolejność działań, sposoby obliczenia potęgi sumy i potęgi ilorazu oraz skorzystać z definicji potęgi o wykładniku zero, a następnie obliczyć wartość 1^{-2}. Zadania sprawdzające między innymi znajomość definicji potęgi o wykładniku zero również w poprzednich latach nie sprawiały zdającym trudności.

Podobna sytuacja wystąpiła w przypadku zadania 13. sprawdzającego umiejętność rozpoznawania, czy ciąg jest geometryczny. Do poprawnego rozwiązania konieczna była znajomość definicji ciągu geometrycznego lub wynikającej wprost z tej definicji własności. Aż 80% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie. W trakcie rozwiązywania wystarczyło wykazać się rozumieniem pojęcia w nieskomplikowanym kontekście, a taką umiejętność zdecydowana większość maturzystów ma dobrze opanowaną.

Dla zdających maturę z matematyki łatwe okazały się także zadania badające znajomość własności obiektów matematycznych, będących naturalną konsekwencją właściwego rozumienia definiowanych pojęć. I tak: zadanie 9., w którym trzeba było wykorzystać pojęcie wartości bezwzględnej, rozwiązało poprawnie 78% zdających. Podobnie było w przypadku zadania 19., stwarzającego możliwość wykazania się umiejętnością wyznaczania zależności pomiędzy liczbą krawędzi a liczbą ścian bocznych ostrosłupa – 78% maturzystów podało prawidłowe rozwiązanie problemu. Zadania maturalne, które wymagają znajomości elementarnych własności, dotyczące pojedynczych pojęć, niewymagające przetwarzania informacji, ale odwołujące się wprost do konkretnych definicji, nie stanowią trudności dla większości osób przystępujących do matury na poziomie podstawowym.

W arkuszu dla poziomu rozszerzonego najłatwiejsze okazało się zadanie 1. (poziom wykonania zadania – 59%) sprawdzające umiejętności: wykorzystania pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej, sporządzania wykresu i odczytywania z niego własności funkcji oraz rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym, związanych z proporcjonalnością odwrotną. Przy rozwiązywaniu zadania wystarczyło wykorzystać pojęcia wartości bezwzględnej do zapisania wzoru funkcji, sporządzić wykres funkcji, która w dwóch przedziałach była funkcją stałą, a w dwóch była proporcjonalnością odwrotną, i odczytać z rysunku zbiór wartości funkcji. Dla maturzysty, który wyróżnił na osi liczbowej trzy przedziały liczbowe, następnie zapisał wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach i na koniec podał zbiór wartości funkcji było to typowe zadanie ze standardu *wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*. Poziom wykonania zadania (59%) jest porównywalny z poziomem wykonania podobnych zadań z arkuszy egzaminacyjnych z lat ubiegłych, na przykład w 2010 roku był równy 59%, a w roku 2013 – 63%.

Na maturze w maju 2014 r., podobnie jak w latach poprzednich, zadanie prowadzące do badania funkcji kwadratowej z parametrem okazało się dla maturzystów umiarkowanie trudne. W arkuszu maturalnym z 2014 r. było to zadanie 2. (poziom wykonania zadania – 53%), jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi rozwiązywać zadania, prowadzące do badania funkcji kwadratowej oraz obliczać odległość punktu od prostej. Aby poprawnie rozwiązać zadanie należało zaplanować i zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. Maturzyści rozwiązywali nierówność i równanie, które wprost wynikały z treści zadania, a następnie wyznaczali wspólne ich rozwiązania. Warunek istnienia dwóch różnych pierwiastków równania kwadratowego natychmiast prowadził do nierówności kwadratowej jedna niewiadomą m. Za tę część rozwiązania zdający mógł otrzymać 1 punkt. Natomiast warunek, że suma kwadratów odległości punktów

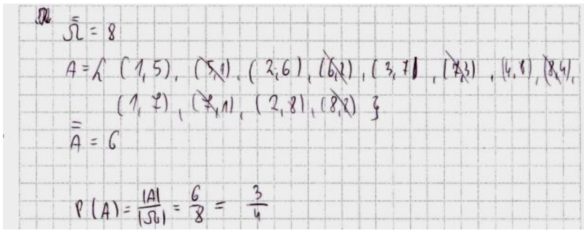
$A=(x_1,0)$ i $B=(x_2,0)$ od prostej o równaniu $x+y+1=0$ jest równa 6 prowadził do zapisania równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi x_1, x_2. Dalszą część rozwiązania maturzysta mógł wykonać na dwa sposoby: wykorzystać wzory Viète'a albo wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Większość zdających wybrała pierwszą z tych możliwości.

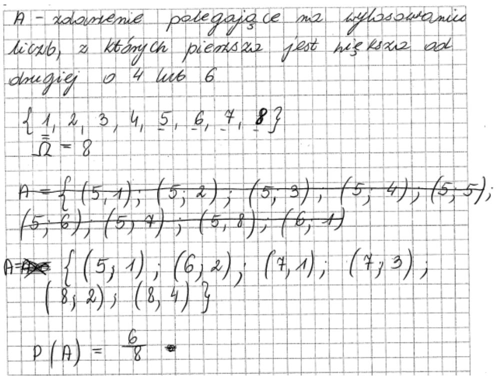
TENDENCJA WZROSTOWA W ZAKRESIE RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Warto zwrócić uwagę na tendencję wzrostową poziomu wykonania zadań, sprawdzających umiejętność stosowania twierdzenia znanego jako *klasyczna definicja prawdopodobieństwa* do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. I tak: w arkuszach z maja 2011 r. i 2012 r. takie zadanie dotyczyło dwukrotnego losowania po jednej liczbie (losowanie ze zwracaniem) ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ i obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia, polegającego na wylosowaniu liczb, których suma jest podzielna przez 3 (maj 2011) albo których iloczyn jest podzielny przez 6 (maj 2012). Poziom wykonania tych zadań był równy w 2011 r. – 42%, a w 2012 r. – 47%. W roku 2013 w arkuszu maturalnym nie znalazło się podobne zadanie, a w bieżącym roku poziom wykonania takiego zadania wzrósł o kolejnych 7 punktów procentowych, w stosunku do rezultatu sprzed dwóch lat (zdający uzyskali średnio 54% punktów możliwych do zdobycia). Mowa tu o zadaniu 30., którego przedmiotem rozważań było doświadczenie, polegające na wylosowaniu za zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem, a należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

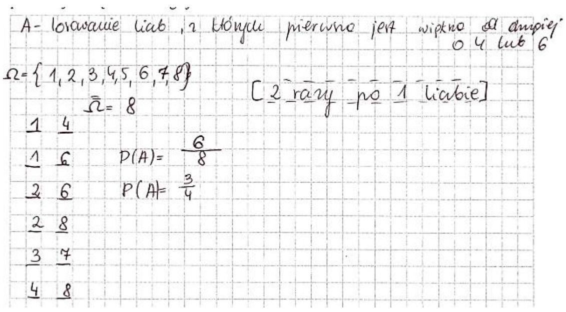
Oczywiście i w tym zadaniu zdający popełniali błędy. Zasadniczą trudnością zadania jest konieczność wyboru właściwego modelu probabilistycznego, a także opisu tego modelu (pary liczb, tabelka, w której są zaznaczone wyniki doświadczenia), policzenia liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zliczenia tych zdarzeń elementarnych, które sprzyjają rozważanemu zdarzeniu w obranym modelu probabilistycznym. Na koniec należy jeszcze zapisać szukane prawdopodobieństwo. Jest to zadanie z III obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych, czyli *modelowania matematycznego*. Maturzyści na ogół nie mieli trudności ze zliczeniem wszystkich zdarzeń elementarnych, których było 64, choć w tym miejscu należy podkreślić, że znaczna część zdających ograniczała się jedynie do zapisania liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, pomijając zupełnie opis tych zdarzeń. Następnie zliczano zdarzenia elementarne sprzyjające rozważanemu zdarzeniu *A*, tu najczęściej zdający po prostu wypisywali wszystkie 6 zdarzeń elementarnych. Często popełnianym przez zdających błędem było zastosowanie różnych modeli probabilistycznych do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$. Maturzyści albo w ogóle nie opisywali zbioru zdarzeń elementarnych, podając od razu błędną ich liczbę, albo też zapisywali błędnie, że zbiorem zdarzeń elementarnych jest podany w treści zadania zbiór ośmiu liczb. Część z tych zdających rozpatrywała dalej jako zdarzenia elementarne pary uporządkowane, używając przy tym bardzo poprawnego zapisu matematycznego.

Oto przykłady takiego niepoprawnego rozumowania.





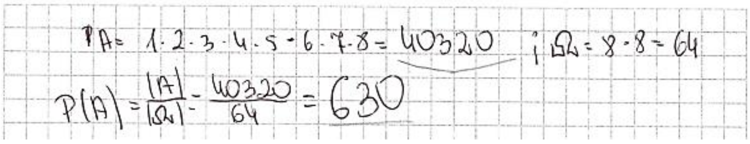
Niektórzy natomiast pary zapisywali mniej formalnie, poprawnie ustalając ich liczbę. Oto przykład niepoprawnego rozwiązania z różnymi modelami probabilistycznymi i z prostym opisem tych modeli.



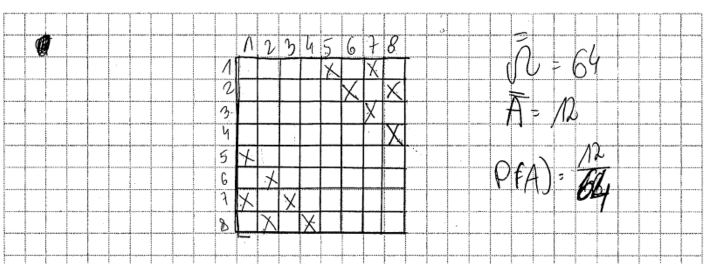
Konsekwentnie co roku rozwiązania zawierające tego typu błąd (rozbieżność modeli probabilistycznych) – oceniane są na 0 punktów.

Tak samo jest w przypadku rozwiązań, w których zdający otrzymuje prawdopodobieństwo większe od 1. Konsekwencją tego błędu jest wynik 0 punktów za niepoprawne rozwiązanie.

Oto przykład takiego rozwiązania.

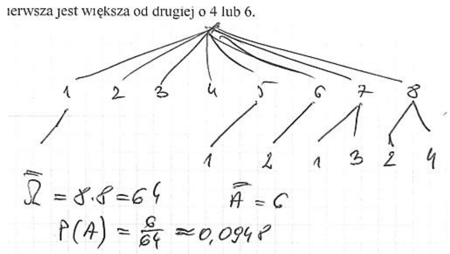


Kolejnym błędem popełnianym przez część zdających było rozszerzenie zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*, najczęściej o sześć dodatkowych par. Część maturzystów zapisywała błędnie zbiór $A = \{(5,1),(6,2),(7,1),(7,3),(8,2),(8,4),(1,5),(2,6),(1,7),(3,7),(2,8),(4,8)\}$ albo też to samo zaznaczała niepoprawnie w tabelce.

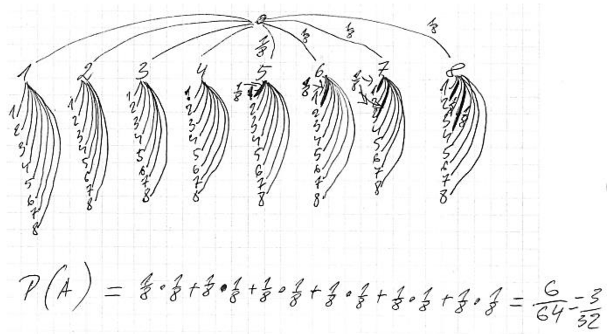


Za rozwiązanie z takim błędem, doprowadzone konsekwentnie do końca, zdający mógł otrzymać 1 punkt.

Zadanie można było również rozwiązać stosując metodę drzewka, przy czym w niektórych rozwiązaniach zawierających drzewko stosowano *de facto* klasyczną definicję prawdopodobieństwa, a drzewko służyło jedynie do zilustrowania zdarzeń sprzyjających, na przykład w taki sposób, jak przedstawiono poniżej.



Niektóre rozwiązania zawierały drzewko, z którego zdający ustalali szukane prawdopodobieństwo.
Oto przykład.



Warto zauważyć, że znaczna część mozolnie wykonanego przez zdającego drzewa nie została wykorzystana. Ten sam efekt można było uzyskać, rysując drzewo zawierające jedynie istotne gałęzie. W poprzednim rozwiązaniu zdający takie drzewo wykonał. Wystarczyłoby jedynie zapisać na odcinkach tego drzewa odpowiednie prawdopodobieństwa (tak jak to zostało zrobione na drugim drzewie), a potem obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia *A*.

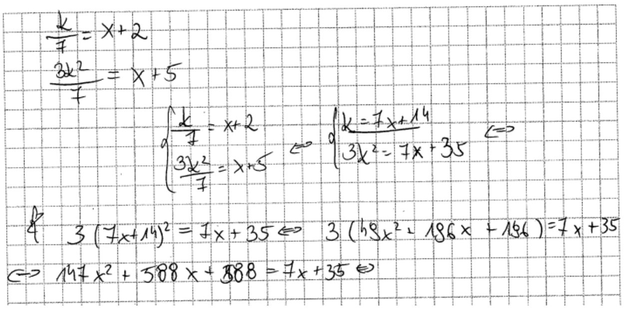
UMIEJĘTNOŚCI SPRAWIAJĄCE TRUDNOŚCI

Ciągle największym wyzwaniem dla maturzystów pozostaje dowodzenie, przedstawienie poprawnego uzasadnienia tezy, zwłaszcza w przypadku zagadnień z zakresu algebry. Wśród zadań z arkusza dla poziomu podstawowego najtrudniejsze okazało się to, które wymagało przeprowadzenia krótkiego rozumowania (zadanie 28. – poziom wykonania zadania wyniósł 8%).

Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

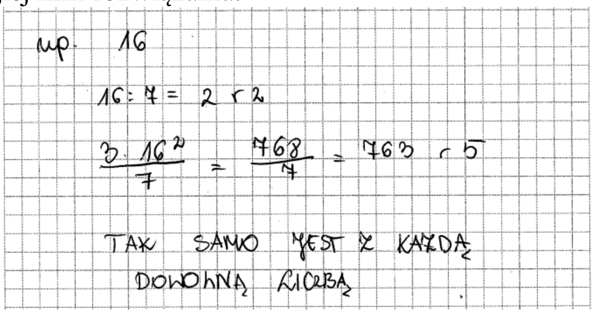
Do udowodnienia tezy zawartej w treści zadania wystarczyła umiejętność zapisania liczby całkowitej k jako sumy wyrażenia $7n$ i liczby 2, a następnie zapisania liczby $3k^2$ w postaci, z której można było wywnioskować, że reszta z dzielenia tej liczby przez 7 jest równa 5. Z dzieleniem z resztą uczniowie spotykają się już w szkole podstawowej, nie wykraczają wówczas jednak poza konkretne przykłady takiego dzielenia. Uczeń gimnazjum powinien już bez problemu zapisać liczbę całkowitą, która dzieli się przez 7 z resztą 5 w postaci wyrażenia algebraicznego. Tegoroczni maturzyści mieli jednak z tym duży problem.

Pierwsza linia przedstawionego poniżej rozwiązania jest przykładem typowego błędu, jaki popełniła znaczna część zdających.



Konsekwencją takiego niepoprawnego zapisu było założenie, że wynikiem dzielenia jest suma pewnej liczby *x* (traktowanej przez zdającego jako liczba całkowita) i liczby 2, a więc zaprzeczenie treści zadania. Ponadto zdający rozumowali, że część całkowita liczby, będącej wynikiem dzielenia $3k^2$ przez 7, jest taka sama jak część całkowita liczby, będącej wynikiem dzielenia *k* przez 7. Takie błędne założenia nie pozwalały na przeprowadzenie poprawnego rozumowania.

Kolejną grupę zdających stanowią Ci, którzy potrafią sprawdzić prawdziwość tezy na jednym przykładzie lub na kilku konkretnych przykładach, i przyjmują, że jest to dowód prawdziwości tezy. Na poniższym przykładzie zdający wybrał liczbę 16 jako jedną z liczb, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5, co zapisał w drugiej linii rozwiązania.



W podobny sposób maturzysta próbował zapisać, że liczba $3 \cdot 16^2$, czyli 768 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5, ale zamiast ilorazu, jaki otrzymał w tym dzieleniu, zapisał liczbę 763 (podzielną przez 7). Stwierdzenie *tak samo jest z każdą dowolną liczbą* jest w opinii zdającego uzasadnieniem prawdziwości tezy. Ten rodzaj błąd logiczny powtarza się corocznie w rozwiązaniach zadań, wymagających przeprowadzenia rozumowania ogólnego.

Wyniki egzaminu maturalnego na poziomie rozszerzonym wskazują, że trudną do opanowania umiejętnością, dla absolwentów szkół kończących się maturą, jest zdolność przeprowadzenia rozumowania wieloetapowego, wymagającego wykorzystania kilku własności tego samego obiektu i stosowania obliczeń w sytuacjach, gdy konieczne jest posługiwanie się sumą wielu składników lub iloczynem wielu czynników. Zadanie 7. z arkusza dla poziomu rozszerzonego wymagało takiej właśnie umiejętności, a maturzyści uzyskali jedynie 19% możliwych do zdobycia za jego rozwiązanie punktów.

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1.

Przy rozwiązywaniu tego zadania zdający musieli wykazać się znajomością definicji ciągu geometrycznego oraz wzorów na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego i sumę *n* wyrazów tego ciągu. Ponadto należało zrozumieć z treści zadania i umiejętnie opisać wzorem (lub wzorami, przy wykorzystaniu definicji ciągu geometrycznego) relację między sumą wyrazów o numerach parzystych a sumą wyrazów o numerach nieparzystych. Niski rezultat uzyskany za rozwiązanie tego zadania może dziwić tym bardziej, że nie było w tym przypadku konieczne stosowanie żadnych skomplikowanych obliczeń, wystarczyły proste operacje na potęgach i logarytmach. Prawdziwym wyzwaniem dla maturzystów okazało się rozwiązywanie zadania, w którym uogólnianie dominuje nad rachunkami, a przekształcanie wzorów jest ważniejsze od obliczeń. Dla wielu zdających stosowanie wzorów w inny sposób niż wstawianie w miejsce liter konkretnych wartości stanowi okoliczność, w której czują się zagubieni.

Problem „pod lupą"

Analiza wyników egzaminu maturalnego z matematyki z ostatnich lat pozwala na sformułowanie wniosku, że zadania schematyczne, standardowe, polegające na interpretowaniu typowego tekstu matematycznego i schematycznym wykorzystaniu informacji lub umiejętności są przez uczniów chętnie i z dobrymi rezultatami rozwiązywane. Natomiast zmiana w treści zadania, nawet niewielka, zwłaszcza w przypadku zadania wymagającego dobrania modelu matematycznego do prostej sytuacji, potrafi spowodować znaczne obniżenie wskaźnika łatwości zadania.

Przyjrzyjmy się zatem najpierw zadaniu 27. z tegorocznego arkusza dla poziomu podstawowego.

Rozwiąż równanie $9x^3+18x^2-4x-8=0$.

Zadania tego typu występują w arkuszach maturalnych regularnie, począwszy od maja 2010 roku. Sprawdzają umiejętność rozwiązywania równania wielomianowego lub, co na jedno wychodzi, wyznaczenia pierwiastków wielomianu stopnia trzeciego.

Oto analogiczne zadania z lat ubiegłych.

Zadanie 27. (maj 2010)
Rozwiąż równanie $x^3-7x^2-4x+28=0$.

Zadanie 28. (maj 2012)
Liczby $x_1=-4$ *i* $x_2=3$ *są pierwiastkami wielomianu* $W(x)=x^3+4x^2-9x-36$. *Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.*

Zadanie 26. (maj 2013)
Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-8x-16=0$.

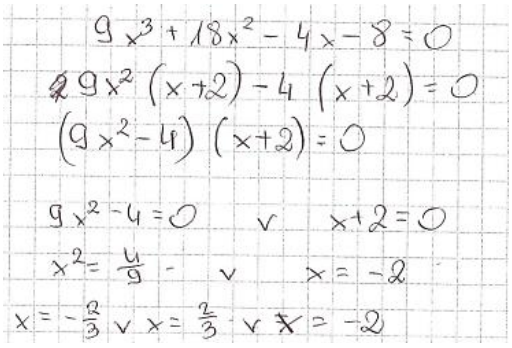
Tabela 3. Poziom wykonania zadań z wielomianem stopnia 3.

Maj 2010 zadanie 27	Maj 2012 zadanie 28	Maj 2013 zadanie 26	Maj 2014 zadanie 27
61%	53%	61%	65%

Zadanie polegające na rozwiązaniu równania wielomianowego (począwszy od maja 2010) jest dla ogółu zdających umiarkowanie trudne i jest jednocześnie jednym z najłatwiejszych zadań otwartych w zestawie egzaminacyjnym. W roku 2012 nastąpiła zmiana formy polecenia z „Rozwiąż równanie" na „Oblicz trzeci pierwiastek", która nie tylko nie powodowała konieczności zmiany aparatu matematycznego wykorzystywanego przez zdającego, ale wręcz rozszerzała możliwości wykorzystania tego aparatu i w gruncie rzeczy ułatwiała rozwiązanie zadania. Mimo to wskaźnik wykonalności zadania był wyraźnie niższy, a przypuszczać można, że powodem jego obniżenia mogła być drobna zmiana w sposobie zredagowania / redakcji treści zadania.

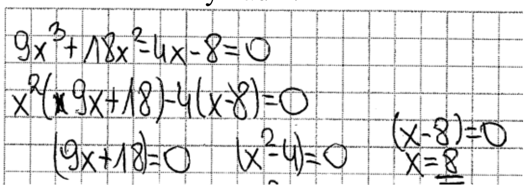
Zadanie 27. z tegorocznego arkusza maturalnego (poziom wykonania zadania – 65%) umożliwiało sprawdzenie umiejętności rozwiązywania prostych równań trzeciego stopnia. Jest to zadanie ze standardu *Wykorzystanie i tworzenie informacji*.

Rozwiązanie zadania przebiegało najczęściej w dwóch etapach. Etap pierwszy polegał na przedstawieniu lewej strony równania w postaci iloczynu $(x+2)(9x^2-4)=0$, co najprościej można było uzyskać metodą grupowania, choć niektórzy zdający wykonywali dzielenie wielomianu $9x^3+18x^2-4x-8$ przez dwumian, przy czym prawie zawsze przez dwumian $(x+2)$, co pozwalało na otrzymanie ilorazu $(9x^2-4)$. Drugi etap polegał na podaniu pierwiastka dwumianu $(x+2)$ (ci zdający, którzy dzielili wielomian przez dwumian $(x+2)$ rozpoczynali rozwiązanie od ustalenia pierwiastka -2) oraz obliczeniu pierwiastków drugiego z otrzymanych czynników, a więc $(9x^2-4)$.
Przykład poprawnie rozwiązanego równania metodą grupowania

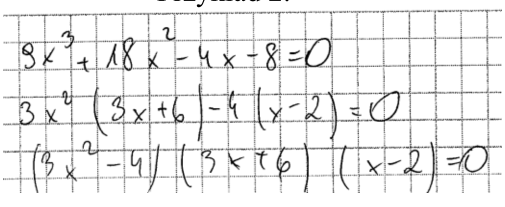


Rozwiązujących, którzy nie uzyskali ani jednego punktu za rozwiązanie tego zadania było około 25%. Wśród nich byli zdający, którzy próbowali rozwiązać równanie metodą grupowania wyrazów, ale nie potrafili poprawnie zrealizować tej metody, przy czym popełniane przez nich błędy miały najczęściej charakter błędów rzeczowych, wskazujących na nierozumienie metody. Poniżej przykłady takich rozwiązań.

Przykład 1.



Przykład 2.



Przykład 3.

$$9x^3+18x^2-4x-8=0$$
$$\cancel{x^2} \quad \cancel{9x^2(4x+2)+}$$
$$9x^2(x+2)-4(x-2)=0$$
$$(9x^2-4)-(x-2)=0$$
$$\cancel{9x^2-4=0} \quad \Downarrow$$
$$9x^2=4 \,|\sqrt{} \quad x=2$$
$$3x=2 \,|:3$$

Przykład 4.

$$9x^3+18x^2-4x-8=0$$
$$x^2(9x+18)-4(x-2)=0$$
$$9x^2(x+2)-4(x+2)=0$$
$$(9x^2-4)(x+2)(x-2)=0$$
$$9x^2-4=0 \lor x+2=0 \lor x-2=0$$

W przykładzie 1. zdający nie potrafił wyłączyć poprawnie czynnika w przypadku, gdy składnik nie zawiera niewiadomej, a do zera przyrównuje wszystkie wyrażenia z nawiasów, pomimo że nie doprowadził wielomianu do postaci iloczynowej. Z kolei w przykładach 2.–4. zdający, po wyłączeniu czynników przed nawiasy, z błędem rachunkowym w przypadku składników poprzedzonych znakiem minus, przy braku zgodności wyrażeń w nawiasach, w kolejnych linijkach stosują zapisy bez logicznego związku z poprzedzającymi je rozumowaniami.

Zdarzały się też rozwiązania, w których zdający próbowali to równanie „sprowadzić” do równania kwadratowego.

$$9x^3+18x^2-4x-8=0$$
$$x(9x^2+18x-4)-8=0 \qquad x=0$$
$$\Delta=\cancel{18^2}-b^2-4ac=18^2-4\cdot(-4)\cdot 9=$$
$$=324-144=180 \qquad \sqrt{\Delta}=3\sqrt{20}$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18-3\sqrt{20}}{18}=\frac{3(-6-\sqrt{20})}{18}=\frac{(-6-\sqrt{20})}{6}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18+3\sqrt{20}}{18}=\frac{3(-6+\sqrt{20})}{18}=\frac{(-6+\sqrt{20})}{6}$$

Około 15% zdających uzyskało za rozwiązania tego równania 1 punkt. Najczęściej były to osoby, które poprawnie zapisywały lewą stronę równania w postaci iloczynu i na tym poprzestawały:

$$9x^3+18x^2-4x-8=0$$
$$9x^2(x+2)-4(x+2)=0$$
$$(x+2)(9x^2-4)=0$$

albo popełniały błędy w drugim etapie rozwiązania:

- błąd przy rozkładzie czynnika $\left(9x^2-4\right)$ na czynniki liniowe oraz dwukrotnie popełniony błąd rachunkowy przy dzieleniu obu stron otrzymanych równań liniowych przez 9;

$9x^3+18x^2-4x-8=0$

$9x^2(x+2)-4(x+2)=0$

$(x+2)(9x^2-4)=0$

$x=2 \quad 9x-2=0 \ \vee\ 9x+2=0$

$9x=2\ /:9 \ \vee\ 9x=-2\ /:9$

$x=\frac{9}{2} \quad x=-\frac{9}{2}$

Odpowiedź: $x=2,\ x=\frac{9}{2},\ x=-\frac{9}{2}$.

- błędnie rozwiązane równanie kwadratowe $9x^2-4=0$, a w konsekwencji brak jednego rozwiązania równania

$9x^3+18x^2-4x-8=0$

$9x^2(x+2)-4(x+2)=0$

$(9x^2-4)(x+2)=0$

$9x^2-4=0 \quad x+2=0$

$9x^2=4\ /:9 \quad \underline{x=2}$

$x^2=\frac{4}{9}\ /\sqrt{\ }$

$\underline{x=\frac{2}{3}}$

Odpowiedź: odp $x=\frac{2}{3}$, $x=2$

- odrzucenie niecałkowitych rozwiązań równania

$9x^3+18x^2-4x-8=0$

$9x^2(x^2+2)-4x-8=0$

$9x^2(x^2+2)-4(x+2)=0$

$(9x^2-4)(x+2)=0$

$(3x-2)(3x+2)(x+2)=0$

$3x-2=0 \quad \cancel{3x+2=0} \quad x+2=0$

$\cancel{3x=2\ /:3} \quad \cancel{3x=-2\ /:3} \quad x=-2$

$\cancel{x=\frac{2}{3}} \quad \cancel{x=-\frac{2}{3}}$

Odpowiedź: $x=-2$

Najczęściej jednak zdający otrzymywali 2 punkty za rozwiązanie tego zadania. Takie osoby stanowią 60% wszystkich maturzystów.

W arkuszach maturalnych z matematyki od 2010 roku regularnie zamieszczano zadanie z *modelowania matematycznego*, umieszczone w kontekście praktycznym, które można rozwiązać dzięki wykorzystaniu równania kwadratowego.

Oto zadanie 33. z tegorocznego egzaminu.

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrówki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 km/h mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Poniżej analogiczne zadania z lat ubiegłych oraz poziomy ich wykonania.

Zadanie 34. (maj 2010)
W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 32. (maj 2011)
Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zadanie 34. (maj 2012)
Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pośpiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pośpieszny.

Zadanie 34. (maj 2013)
Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Tabela 3. Poziom wykonania zadań, które można rozwiązać dzięki wykorzystaniu równania kwadratowego.

Maj 2010 zadanie 34	Maj 2011 zadanie 32	Maj 2012 zadanie 34	Maj 2013 zadanie 34	Maj 2014 zadanie 33
44%	38%	35%	32%	13%

Poziom wykonania zadania tekstowego, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego, z roku na rok maleje, ale od sesji w roku 2011 do sesji w roku 2013 spadek poziomu był stosunkowo niewielki, natomiast w 2014 r. – bardzo wyraźny. Co mogło być przyczyną tak dużej trudności tego zadania?

Zadanie miało na celu sprawdzenie, czy maturzysta potrafi poprawnie opisać sytuację przedstawioną w treści zadania w języku matematyki, to znaczy czy potrafi poprawnie zbudować model matematyczny – w tym przypadku odpowiednie równanie, rozwiązać je oraz poprawnie zinterpretować otrzymane wyniki.

Rozwiązując to zadanie, zdający najczęściej oznaczali prędkość średnią, z jaką turysta pokonał drogę z parkingu na zamek, czas, w jakim tę drogę pokonał, następnie zapisywali – w zależności od wprowadzonych niewiadomych – prędkość, z jaką turysta pokonał drogę powrotną oraz czas, w jakim to zrobił. W ten sposób układali układ równań z dwiema niewiadomymi, a następnie sprowadzali go do równania kwadratowego z jedną niewiadomą. Znacznie rzadziej występowały rozwiązania, gdzie zdający wprowadzał tylko jedną niewiadomą, a wszystkie pozostałe wielkości uzależniał od tej niewiadomej, układając w rezultacie od razu równanie z jedną niewiadomą. Poniżej fragment takiego rozwiązania.

Zadanie nr 33 – rozwiązanie

$$\frac{64}{60} = \frac{2,1}{v} + \frac{2,1}{v-1}$$

v – prędkość z jaką schodził turysta

Każde z przytoczonych powyżej zadań tekstowych opisuje pewną sytuację z tzw. „kontekstem praktycznym”, czyli sytuację z życia: baseny w hotelach (maj 2010), trasę pokonywaną przez turystę (maj 2011, maj 2014), pociągi jeżdżące po liniach kolejowych (maj 2012, maj 2013). Nie można zatem twierdzić, że kontekst praktyczny tegorocznego zadania tekstowego był nowy, czy też zaskakujący. Zależność między przebytą drogą, czasem, a średnią prędkością znaczna część zdających znała, często jednak tylko jako formalnie zapisany wzór $v = \frac{s}{t}$. Rozwiązania tych zdających ograniczały się więc często do zapisania zależności $v = \frac{2,1}{t}$, czy też $v \cdot t = 2,1$. Niektórzy ze zdających szli krok dalej i poprawnie zapisywali zależność między średnią prędkością wchodzenia i średnią prędkością schodzenia. Oto przykłady.

$$\begin{cases} 2,1 = v \cdot t \\ 2,1 = (v-1)\,t \end{cases}$$

$2,1 = vt - t$

$0 = vt - t - 2,1$

$0 = \cancel{2,1} - t - \cancel{2,1}$

$S = 2,1$ km

długość całej trasy (tam i z powrotem) = 4,2 km

$v = \frac{km}{h}$; $v = \frac{s}{t}$

$s = v \cdot t$

t – czas przejścia ~~[illegible]~~

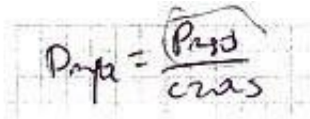
v – prędkość

v − 1 – prędkość turysty wchodząc na górę

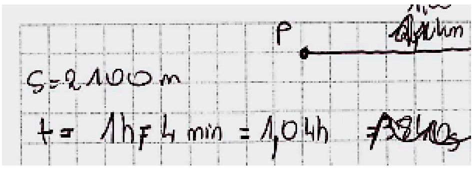
$$\begin{cases} v \cdot t = 2,1 \\ (v-1)\,(t \end{cases}$$

$v \cdot t = s$

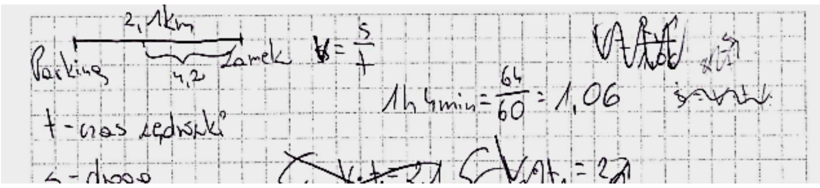
Zdarzały się też, choć stosunkowo rzadko, rozwiązania, w których zdający niepoprawnie zapisywali tę zależność, na przykład traktowali wartość drogi jako iloraz prędkości i czasu:



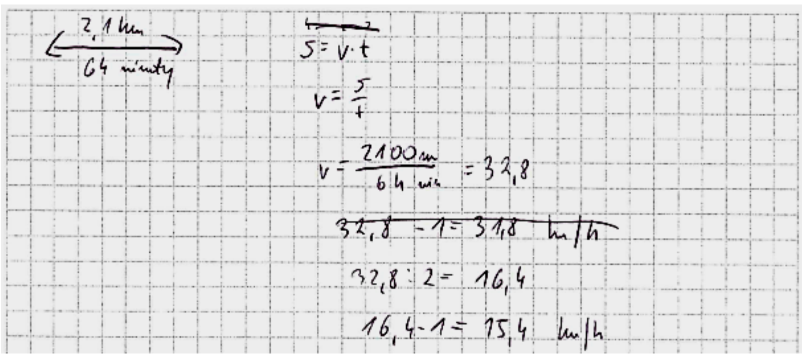
Łączny czas wędrówki turysty podany był w zadaniu w postaci 1 godziny i 4 minut. Czas ten należało wyrazić w takich jednostkach, jakie wykorzystywane są przy podawaniu wartości prędkości. W tym przypadku czas najwygodniej wyrazić w godzinach, gdyż wówczas nie trzeba przeliczać jednostek prędkości. Podobna sytuacja wystąpiła już w zadaniu 34. na egzaminie w roku ubiegłym – tam czas podany został w minutach, a prędkości w km/h. Analogicznie jak w roku ubiegłym, tak i w tym, część zdających miała kłopoty z poprawnym przeliczeniem jednostek czasu, choć jest to umiejętność z zakresu II etapu edukacyjnego. Niektórzy maturzyści błędnie zakładali, że godzina ma 100 minut.



Inni z kolei poprawnie zamieniali 1 godzinę i 4 minuty na godziny, ale zamiast pozostać przy dokładnej wartości wyrażonej ułamkiem zwykłym niewłaściwym podawali uzyskane z kalkulatora rozwinięcie dziesiętne, które błędnie zaokrąglali.

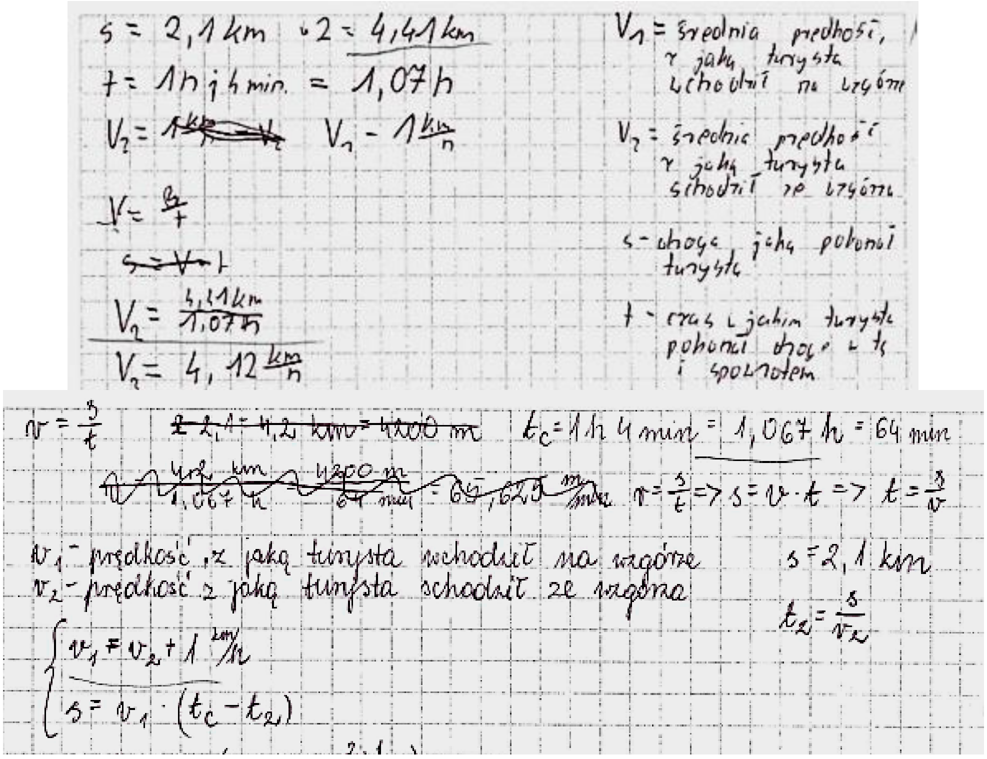


W rozwiązaniu, przedstawionym poniżej zdający poprawnie wyraził drogę 2,1 km w metrach, czas 1 h 4 min poprawnie zamienił na minuty, otrzymał prędkość w m/min, jednak wyznaczona wartość dalej potraktował tak, jakby była podana w km/h.



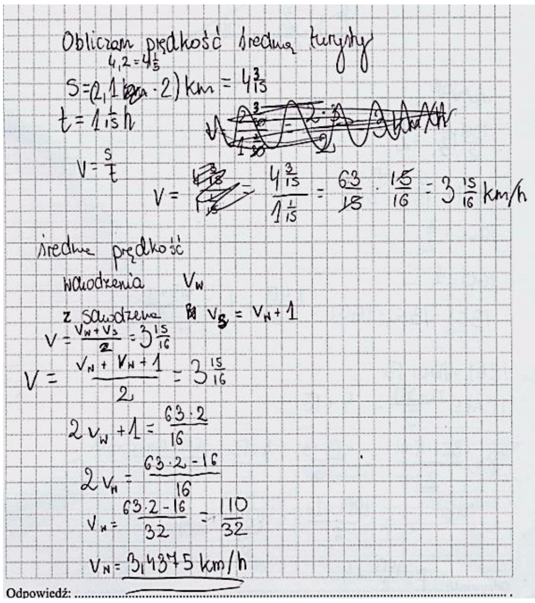
Wśród przedstawionych przez zdających rozwiązań można wyróżnić także takie, w których popełniono błędy w interpretacji treści zadania. Podobnie jak w latach poprzednich zdarzały się sytuacje, kiedy zdający zapisywał błędne równanie, mające opisywać zależność między dwiema wielkościami – na skutek pomniejszenia wielkości mniejszej i przyrównania jej po dokonaniu takiej operacji do wielkości większej lub, odwrotnie, powiększenia wielkości większej i przyrównania jej po dokonaniu takiej operacji do wielkości mniejszej.

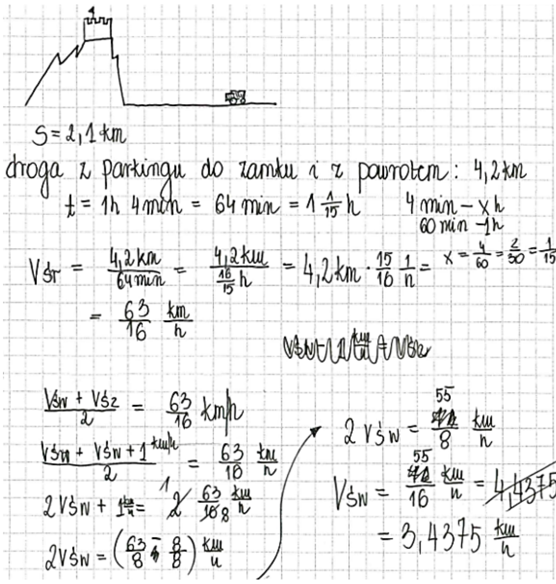
Oto przykład takiego błędu – wartość prędkości v_2, w zadaniu większa od wartości prędkości v_1 o 1, została jeszcze zwiększona o 1 i po tej operacji przyrównana do v_1, co stanowi błędną interpretację treści zadania.



Duża część zdających, często tych, którzy osiągnęli dobry rezultat za cały egzamin, błędnie przyjmowała, że średnia prędkość na drodze parking-zamek-parking jest średnią arytmetyczną prędkości średnich na obu odcinkach tej drogi.

Dwa poniższe przykłady przedstawiają tego typu błędne rozwiązania doprowadzone do końca.





W tym miejscu należy wspomnieć, że do rzadkości należały poprawne rozwiązania, w których zdający wykorzystywali fakt, że średnia prędkość na drodze parking-zamek-parking jest średnią harmoniczną prędkości średnich na obu odcinkach tej drogi.

Oto przykład takiego nietypowego rozwiązania.

v_w – prędkość wejścia, v_z – prędkość zejścia

$$V_s = \frac{2}{\frac{1}{v_w}+\frac{1}{v_z}} = \frac{2v_w v_z}{v_w+v_z} = \frac{2v_w(v_w+1)}{v_w+v_w+1}$$

$$\frac{4{,}2}{1\frac{4}{60}} = \frac{4{,}2}{1\frac{1}{15}} = \frac{21}{5}\cdot\frac{15}{16} = \frac{63}{16} = V_s$$

$$\frac{63}{16} = \frac{2v_w^2+2v_w}{2v_w+1}$$

$$126v_w + 63 = 32v_w^2 + 32v_w$$

$$-32v_w^2 + 94v_w + 63 = 0$$

$$\Delta = 94^2 + 4\cdot 32\cdot 63 = 16900, \quad \sqrt{\Delta} = 130$$

$$v_w = \frac{-94-130}{-64} = \frac{224}{64} = 3{,}5 \quad \text{lub} \quad v_w = \frac{-94+130}{-64} < 0$$

Treść zadania 33. z arkusza matury z bieżącego roku różni się nieco od treści każdego z wcześniej przytoczonych zadań tekstowych z poprzednich matur. W tym zadaniu bowiem podany został łączny czas, w jakim turysta pokonał każdy z dwóch odcinków drogi. W żadnym z poprzednich zadań taka „wspólna" dla obu sytuacji dana wielkość nie występowała (basen w pierwszym hotelu i basen w drugim hotelu, samochód jadący z miasta A do miasta B i samochód jadący z miasta B do miasta A itp.). Z analizy rozwiązań zdających wynika, że to właśnie podanie łącznego czasu dla dwóch odcinków drogi, a nie czasu oddzielnie dla każdego z etapów wędrówki, przysparzało najwięcej trudności. W efekcie blisko 4 na 5 zdających nie otrzymało za rozwiązanie tego zadania żadnego punktu, mimo że z zadaniem zmierzyło się blisko 9 na 10 zdających.

Poniżej kilka fragmentów rozwiązań, w których zdający mieli kłopoty z nietypowo podaną wielkością (z „łącznym" czasem).

Przykład 1.

$$\begin{cases} v\cdot t = 2100 \quad //t \\ (v-1)\left(t+1\frac{4}{6}\right) = 2100 \end{cases}$$

Zdający potraktował podany czas pokonania dwóch etapów drogi jako różnicę między czasem wchodzenia a czasem schodzenia.

Przykład 2.

2,1 km $64 : 2 = 32$ min w jedną stronę

2,1 km $\Downarrow$ = 32 min

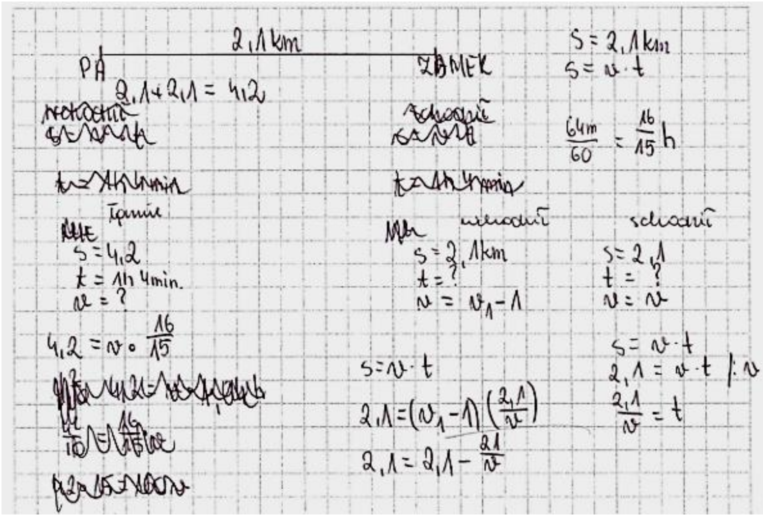
V_1 = prędkość z jaką wchodzi

V_2 = prędkość z jaką schodzi

$32 : 2{,}1 = 15{,}2$

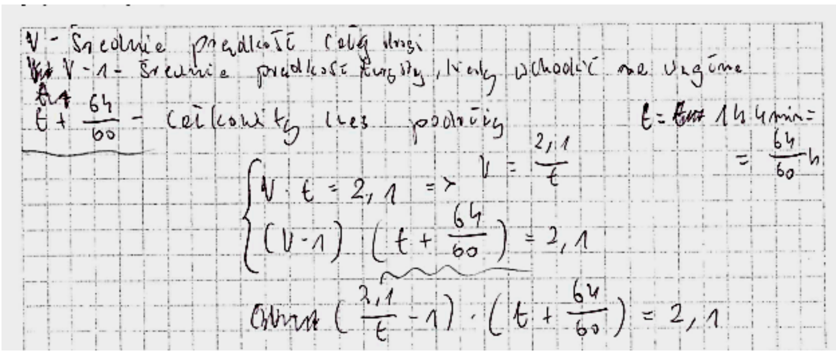
Zdający przyjął, że na każdy etap drogi trzeba przeznaczyć tyle samo czasu, pomimo że prędkości poruszania się na poszczególnych etapach są inne.

Przykład 3.



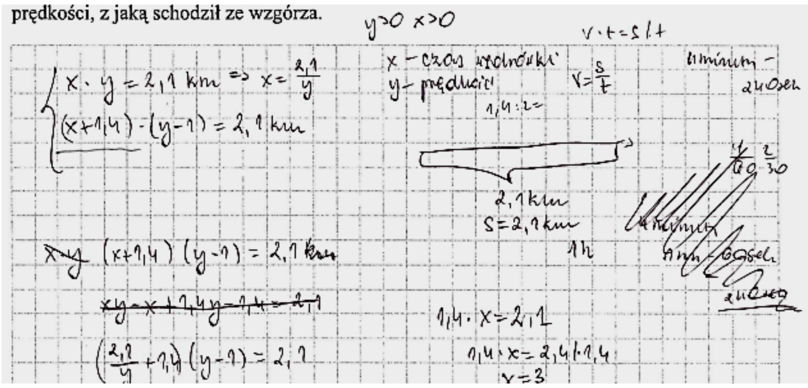
Zdający nie wykorzystał poprawnie przeliczonego na godziny czasu w swoim rozwiązaniu.

Przykład 4.



Maturzysta potraktował podany czas pokonania dwóch etapów drogi, poprawnie przeliczony na godziny, jako różnicę między czasem wchodzenia a czasem schodzenia.

Przykład 5.



Tym razem zdający również potraktował podany czas pokonania dwóch etapów drogi jako różnicę między czasem wchodzenia a czasem schodzenia, ale dodatkowo przyjął, że 4 minuty to 0,4 godziny.

Wśród tych zdających, którzy otrzymali co najmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania 33., około połowa otrzymała 3 punkty. W tej grupie znajdują się ci, którzy zapisali poprawnie równanie z jedną niewiadomą i na tym poprzestali, a także ci zdający, którzy nie potrafili poradzić sobie z rozwiązaniem otrzymanego równania. Jedynie 1 zdający na 10 (wśród tych, którzy otrzymali co najmniej 1 punkt) otrzymał 4 punkty. To z kolei oznacza, że jeśli maturzysta umiał doprowadzić zadanie do końca, nie popełniając błędów przekreślających poprawność rozwiązania, to z reguły poprawnie interpretował otrzymany wynik, odrzucając najczęściej ujemne rozwiązanie równania.

Niestety nadal zdarzały się rozwiązania, które wskazują, że zdający przyjmują jako poprawne rozwiązania, które z założenia należy odrzucić, gdyż wyniki zaprzeczają codziennemu doświadczeniu oraz/lub są po prostu nierealne (np. prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze większa niż 40 km/h).

Podsumowanie

Wyniki egzaminu maturalnego wskazują, że zadania typowe, schematyczne, zawierające utarte sformułowania i układ treści znany z egzaminów w latach poprzednich, są na ogół rozwiązywane przez zdających z dobrymi rezultatami. Powielanie ujęcia zagadnienia w treści zadań sprawia, że poziom wykonania zadań wzrasta, ale to niekoniecznie musi być dowodem na zrozumienie istoty problemu. Z kolei każda modyfikacja schematycznego sformułowania, nawet niewielka zmiana w podaniu wielkości danych w treści zadania tekstowego, powoduje, że zdający często nie potrafią poradzić sobie z problemem. Dotyczy to także sytuacji, gdy nowe ujęcie zagadnienia daje nowe, również łatwiejsze, możliwości znalezienia rozwiązania.

Wnioski i rekomendacje

Maturzyści przystępujący do egzaminu z matematyki w 2014 r. najlepsze rezultaty osiągnęli przy rozwiązywaniu zadań schematycznych, sformułowanych w sposób typowy, wymagających zastosowania jednej własności lub rozumienia jednego pojęcia. Istnieją umiejętności, których badanie jest na tyle atrakcyjne dla zdających, że podejmują się oni, z dobrym skutkiem, rozwiązywania zadań, wymagających także innych umiejętności. Na przykład powszechne opanowanie umiejętności obliczania potęgi z wykładnikiem równym 0 pozwoliło maturzystom na wykazanie się także umiejętnością stosowania praw działań na potęgach. Wskazywanie brakującego wyrazu ciągu geometrycznego jest na tyle dobrze opanowane, że zdający nie unikają koniecznych obliczeń. Zadania, w których jedną z badanych umiejętności było wyznaczanie wartości bezwzględnej wyrażenia, również należały do grupy zadań, pozwalających osiągać najlepsze wyniki.

Równocześnie wyraźnie daje się zauważyć, że maturzyści mają poważne problemy z właściwą interpretacją tekstów matematycznych. Każde odejście od schematycznego formułowania treści zadania, przedstawianie zagadnień, prowadzące do ułatwienia poszukiwania rozwiązania, zmiany w sposobie przedstawiania wielkości danych, nawet nieznaczne modyfikacje w szablonowym ujęciu zadań, przyczyniają się do obniżenia wyników i wydają się stanowić istotną przeszkodę dla zdających na drodze do znalezienia poprawnego rozwiązania problemu.

Dużym wyzwaniem, czasem nie do pokonania, jest dla zdających konieczność przeprowadzenia rozumowania, prowadzącego do udowodnienia, przedstawienia poprawnego uzasadnienia, uogólnienia prawidłowości. Zagadnienia wymagające rozumowania wieloetapowego, poszukiwania zależności są wyraźnie trudniejsze niż te, do rozpatrywania których wystarczą umiejętności rachunkowe czy rozumienie stosowania definicji czy algorytmów działania.

Dla osób chcących przystąpić do matury ważne jest, by nie unikać rozwiązywania problemów wymagających przeprowadzenia rozumowania łączącego kilka logicznie powiązanych etapów działania, a także nie stronić od poszukiwania niekonwencjonalnych sposobów rozwiązania. Ważne jest także, by nie ograniczać się do wybierania jedynie kilku zagadnień, wokół których będą budowane umiejętności matematyczne mające stanowić przygotowanie do egzaminu maturalnego. Dotyczy to również schematycznego ujęcia problemów i powielania szablonów rozwiązań.

Powyższe jest prawie nieosiągalne bez dobrego przewodnika – nauczyciela, który może nie tylko czuwać nad kształtowaniem umiejętności prawidłowego stosowania pojęć i matematycznych metod poszukiwania rozwiązań, ale może także wskazywać różne sposoby ujęcia problemu, wskazywać różne drogi prowadzące do rozwiązania i zachęcać do tworzenia własnych modeli matematycznych. Nauczyciel może na przykład połączyć w jednym zadaniu zagadnienia dobrze opanowane przez ucznia z problemami nietypowymi, nowymi dla ucznia, także trudnymi – i tym samym zwiększyć szanse na opanowanie kolejnych umiejętności.

Ważna jest przy tym świadomość, że na sukces na egzaminie maturalnym składa się praca ucznia i jego nauczycieli na każdym etapie edukacyjnym, począwszy od edukacji wczesnoszkolnej. Uczeń, który na początku swojej edukacji pojmie przełożenie matematyki na sytuacje praktyczne w życiu codziennym, dobrze zrozumie pojęcia matematyczne i opanuje umiejętności przewidziane w nauczaniu matematyki na poziomie szkoły podstawowej i gimnazjum, uzyska lepszy wynik egzaminu maturalnego.