Informator o egzaminie maturalnym

z matematyki

jako przedmiotu obowiązkowego

(poziom podstawowy)

od roku szkolnego 2022/2023

dla uczniów niewidomych

1. [Opis egzaminu maturalnego z matematyki](#opis_egzaminu) na poziomie podstawowym

Wstęp

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów na egzaminie maturalnym. Wszyscy zdający przystępują do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Każdy maturzysta może również przystąpić do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym jako przedmiotu dodatkowego.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w [podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej](https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Formula_2023/podstawa_programowa/matematyka.pdf).

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe. Wymagania ogólne mają podstawowe znaczenie, gdyż syntetycznie ujmują nadrzędne cele kształcenia w nauczaniu matematyki. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności.

„Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2022/2023” jest podzielony na dwie części, zamieszczone jako osobne pliki.

Część pierwsza zawiera:

- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym

- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie podstawowym.

Część druga zawiera:

- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym

- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie rozszerzonym.

„Informator” prezentuje przykładowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Zadania w „Informatorze”nie ilustrują wszystkich wymagań szczegółowych na poziomie podstawowym określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie w zakresie matematyki, w tym – właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

Zadania na egzaminie

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których zdający wybiera odpowiedź spośród podanych. Wśród zadań zamkniętych znajdą się m.in.:

- zadania wyboru wielokrotnego

- zadania typu prawda-fałsz

- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych znajdą się m.in.:

- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełniania wykresu, zależności, diagramu, tabeli

- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia zwykle w dwóch lub trzech etapach

- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności określonych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)

- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)

- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)

- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły następujących obszarów tematycznych matematyki (w nawiasach zapisano numery treści nauczania podstawy programowej):

- liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności (I, II, III, IV)

- funkcje, ciągi, optymalizacja (V, VI, XIII)

- planimetria, geometria analityczna, stereometria (VII, VIII, IX, X)

- kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (XI, XII).

Aby sprawdzić opanowanie przez zdających wymagania ogólnego „IV. rozumowanie i argumentacja”, wśród zadań egzaminacyjnych znajdą się zadania na dowodzenie, wymagające od zdającego przeprowadzenia dowodu matematycznego. W celu sprawdzenia opanowania przez zdających wymagania ogólnego „III. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych” w „Informatorze” znajdą się również zadania z kontekstem praktycznym / realistycznym. Zadania tego typu będą miały uproszczone założenia, tzn. będą pomijały niektóre rzeczywiste warunki. Dzięki takiej idealizacji zagadnienia będzie można łatwiej zbudować jego adekwatny model matematyczny, który –po pierwsze –będzie opisywał istotę zagadnienia, po drugie –będzie korzystał z narzędzi dostępnych na danym etapie nauczania, a po trzecie – nie będzie wymagał specjalistycznej wiedzy z zakresu danego kontekstu.

Opis arkusza egzaminacyjnego

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym trwa 270 minut. W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 29 do 40 zadań. Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za prawidłowe rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

Liczbę zadań oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań w całym arkuszu przedstawiono poniżej.

Rodzaj zadań: Zamknięte  
Liczba zadań: 20–25

Łączna liczba punktów: 25

Udział w wyniku sumarycznym: 50%

Rodzaj zadań: Otwarte  
Liczba zadań: 9–15

Łączna liczba punktów: 25

Udział w wyniku sumarycznym: 50%

Razem:   
Liczba zadań: 29–40

Łączna liczba punktów: 50

Udział w wyniku sumarycznym: 100%

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań może się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Zasady oceniania

Zadania zamknięte  
 Zadania zamknięte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

albo

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

1 pkt – odpowiedź częściowo poprawna lub odpowiedź niepełna.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 1, 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż opisane w zasadach oceniania, można przyznać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte z luką

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

2 pkt – rozwiązanie całkowicie poprawne.

1 pkt – rozwiązanie częściowo poprawne lub rozwiązanie niepełne.

0 pkt – rozwiązanie całkowicie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

2 pkt – rozwiązanie poprawne.

1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale

rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo

brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

3 pkt – rozwiązanie poprawne.

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

4 pkt – rozwiązanie poprawne.

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

W rozwiązaniu zadań otwartych wyróżniony został najważniejszy etap, nazywany pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie można otrzymać za bezbłędne rozwiązanie danego zadania. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżnia się jeszcze jeden etap (w przypadku zadań za 3 pkt) lub dwa etapy poprzedzające (w przypadku zadań za 4 pkt): dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania oraz/lub dokonanie niewielkiego postępu, który jest konieczny do rozwiązania zadania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania danego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania jakościowo równoważny postęp na drodze do rozwiązania zadania.

Wybrane oznaczenia i symbole matematyczne

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym będą stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

N – zbiór liczb naturalnych

Z – zbiór liczb całkowitych

Q – zbiór liczb wymiernych

R – zbiór liczb rzeczywistych

– suma zbiorów oraz

– iloczyn zbiorów i (część wspólna zbiorów i )

– różnica zbioru i zbioru .

– zbiór A jest podzbiorem zbioru

– element należy do zbioru

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych takich, że

– zbiór wszystkich liczb rzeczywistych takich, że

Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:

, , .

Materiały i przybory pomocnicze na egzaminie z matematyki

Materiały i przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym z matematyki, to:

- linijka

- cyrkiel

- kalkulator prosty

- wybrane wzory matematyczne.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzenia egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

W „Informatorze” dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (w nawiasach, po numerze zadania)

- zasady oceniania rozwiązania tego zadania

- poprawne rozwiązanie w przypadku zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązanie w przypadku zadania otwartego.

W przykładowych rozwiązaniach zadań otwartych są wyodrębnione dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Początek i koniec komentarza oznaczono nawiasami kwadratowymi [ ].

LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia

jest równa

A. 0

B. 1

C. 2021

D. 2023

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 2. (0–1)

Na osi liczbowej zaznaczono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających pewną nierówność.

x

–2

8

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przedstawiony zbiór jest rozwiązaniem nierówności:

A.

B.

C.

D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3. (0–1)

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30%

B. 34%

C. 36%

D. 43%

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 4. (0–2)

Oblicz wartość wyrażenia . Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci .

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci 1 + lub .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zadanie 5. (0–2)

Dane są liczby oraz .

Oblicz wartość wyrażenia

dla podanych a i b.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wyrażenia dla podanych a i b oraz zapisanie prawidłowego wyniku: =1

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci:  =a ∙ b

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Przekształcamy równoważnie wyrażenie do najprostszej postaci: ]

[ Komentarz

Podstawiamy wartości a i b do otrzymanego wyrażenia i obliczamy jego wartość: ]

## Zadanie 6. (0–2)

Dana jest liczba , gdzie należy do zbioru R liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby oraz są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zapisz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: C i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: C albo E.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

CE

[ Komentarz

Przekształcimy równoważnie wyrażenie określające liczbę x – w tym celu zastosujemy m.in. wzór skróconego mnożenia: ]

Liczba x będzie wymierna, jeśli liczba a będzie postaci: , gdzie q będzie dowolną liczbą wymierną:

Sprawdzimy, które z liczb a podanych w odpowiedziach A–G mają postać (gdzie q jest wymierne):

C.

E.

Liczby podane w odpowiedziach C i E mają żądaną postać. ]

## Zadanie 7. (0–2)

Rozwiąż równanie:

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania podanego w treści zadania (rozwiązanie

równania lub równania oraz wyznaczenie dziedziny

równania) i podanie wyniku: x = .

1 pkt – poprawne rozwiązanie równania x = lub

- poprawne wyznaczenie dziedziny równania = 0: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Rozwiązaniami równania postaci są takie liczby , dla których:

oraz

Mianownik ułamka musi być różny od zera, zatem: ]

[ Komentarz  
Iloczyn jest różny od zera, gdy każdy z czynników iloczynu jest różnym od zera: ]

[ Komentarz

Gdy mianownik ułamka jest różny od zera, to ułamek jest wtedy równy zero, gdy licznik jest równy zero, zatem: ]

[ Komentarz  
Iloczyn jest równy zero, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy zero: ]

Ponieważ , to rozwiązaniem równania jest liczba x = .

## Zadanie 8. (0–2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania 1. i 2. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych dla każdego zdania.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

A. o 40% pensji pana Y.

B. o 90% pensji pana Y.

C. o 150% pensji pana Y.

D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

E. o 60% pensji pana X.

F. o 73% pensji pana X.

G. o 90% pensji pana X.

H. o 150% pensji pana X.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.

1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1.C  2.E

[ Komentarz

Średnią krajową oznaczymy jako , pensję pana X jako , a pensję pana Y jako y.

Wtedy: Wykonujemy obliczenia:

## Zadanie 9. (0–1)

Na wykresie przedstawiono zależność , gdzie jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili rozpoczęcia obserwacji.

Na osi poziomej znajduje się czas wyrażony w h. Na osi pionowej znajduje .

log K

1

0

3

1

3

t

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili , liczba K bakterii była równa

A. 3  
B. 100  
C. 1000  
D. 10000

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

## Zadanie 10. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.   
B.   
C.   
D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

## Zadanie 11. (0–3)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:

, oraz .

Oblicz wartość liczbową wyrażeniadla dowolnych liczb rzeczywistychai b,spełniających powyższe warunki.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości ilorazu oraz podanie prawidłowego wyniku

= 1.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci oraz wyznaczenie rozwiązań

tego równania: , , (bez uwzględnienia warunków zadania).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Równanie podane w zadaniu przekształcamy w sposób równoważny. Do prawej strony równania zastosujemy wzór na trzecią potęgę sumy liczb a i b: ]  
[ Komentarz   
Iloczyn po lewej stronie równania jest równy 0, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0. Zatem: ]  
Stąd mamy:

Gdy uwzględnimy warunki zadania i , to otrzymujemy:

## Zadanie 12. (0–1)

Dane jest wyrażenie

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.  
  
1. Wartość wyrażenia jest określona dla każdej liczby rzeczywistej   
2. Wartość wyrażenia można przekształcić równoważnie do wyrażenia .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi. Wartość wyrażenia jest określona dla każdej liczby rzeczywistej

Rozwiązanie

1.F, 2.P

## Zadanie 13. (0–3)

Rozwiąż równanie **.**

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania oraz podanie prawidłowych rozwiązań:

, , , .

2 pkt – rozwiązanie równania : , oraz zapisanie równań równoważnych: , lub

– prawidłowe obliczenie jednego z pierwiastków równania : (drugi pierwiastek obliczony błędnie lub wcale) albo (drugi pierwiastek obliczony błędnie lub wcale) oraz konsekwentne – z tym prawidłowo wyznaczonym pierwiastkiem – rozwiązanie równania podanego w zadaniu i zapisanie:

, albo , .

1 pkt – wykonanie odpowiedniego podstawienia i przekształcenie do równania postaci równoważnej równaniu , gdzie .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie  
[ Komentarz  
Zauważmy, że równanie w tym zadaniu jest przykładem równania dwukwadratowego. Dlatego w równaniu podstawiamy , gdzie , po czym otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą z: ]

Rozwiązujemy równanie

[ Komentarz

Obliczymy tzw. wyróżnik równania kwadratowego

.

Ponieważ to możemy zastosować gotowe wzory na rozwiązania równania kwadratowego:

Rozwiązania równania kwadratowego:

[ Komentarz

Powracamy do podstawienia i wyznaczamy rozwiązania równania podanego w zadaniu: ]

Stąd:

## Zadanie 14. (0–2)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba  przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci

oraz zapisanie, że jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie danego wyrażenia do postaci .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Krok 1. dowodu

[ Komentarz

Powołamy się na definicję reszty z dzielenia dwóch liczb całkowitych. Liczba całkowita W przy dzieleniu przez liczbę całkowitą P daje resztę całkowitą R, wtedy, gdy istnieje liczba całkowita Q taka, że oraz . (Np. Liczba 22 przy dzieleniu przez 5 daje resztę równą 2, ponieważ , gdzie 4 jest liczbą całkowitą oraz ). ]

Liczbę określoną w zadaniu przekształcimy do postaci: :

Krok 2. dowodu

[ Komentarz

Wykażemy dalej, że jest liczbą całkowitą. ]

Ponieważ n jest liczbą naturalną, to oraz są liczbami całkowitymi. Suma tych liczb całkowitych oraz liczby 1 jest liczbą całkowitą.

Z kroków 1.–2. dowodu wynika, że dla każdej liczby naturalnej n liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

## Zadanie 15. (0–3)

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba jest podzielna przez 9.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie jako oraz zapisanie, że jest liczbą całkowitą (kroki 1.–3. dowodu)

2 pkt – zapisanie jako oraz przekształcenie tego wyrażenia do postaci równoważnej wyrażeniu (kroki 1.–2. dowodu).

1 pkt – zapisanie liczb a i b w postaci: oraz , gdzie (krok 1. dowodu).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Krok 1. dowodu

[ Komentarz

Dwie kolejne liczby naturalne a i b, niepodzielne przez 3, można zapisać w postaci: ]

oraz , gdzie

Krok 2. dowodu

[ Komentarz

Zapiszemy liczbę z wykorzystaniem zapisu (krok 1. dowodu) oraz wzoru na sześcian sumy: ]

Krok 3. dowodu

[ Komentarz

Liczbę zapisaliśmy jako iloczyn liczby 9 oraz liczby . Dlatego, aby udowodnić podzielność przez 9, wystarczy wykazać, że drugi czynnik w rozkładzie (krok 2. dowodu) jest liczbą całkowitą. ]

Ponieważ , to , oraz są liczbami całkowitymi. Suma liczb całkowitych oraz liczby 1 jest liczbą całkowitą.

Z kroków 1.–3. dowodu wynika, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb niepodzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 9.

## Zadanie 16. (0–3)

Dany jest wielomian

gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej:

gdzie jest pewnym trójmianem kwadratowym.

Wyznacz wielomian oraz oblicz wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu .

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu , obliczenie pierwiastków

wielomianu oraz podanie wyników: , , x3 = .

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu , tzn. zastosowanie algorytmu

dzielenia wielomianu przez dwumian oraz poprawna postać tego wielomianu: lub

– poprawna metoda wyznaczenia wielomianu , błędy w obliczeniach oraz poprawna metoda obliczenia pierwiastków wielomianu , tzn. zapisanie , oraz rozwiązanie obu równań.

1 pkt – zapisanie, że , oraz poprawne obliczenie współczynnika lub

– zapisanie, że , błędy w obliczeniach przy wyznaczeniu m oraz postępowanie prowadzące do wyznaczenia wielomianu , tzn. zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianu przez dwumian .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Wyznaczymy jeden z pierwiastków . Wykorzystamy informację o rozkładzie wielomianu na czynniki: ]

[ Komentarz  
Obliczymy m. Ponieważ , to: ]  
Zatem:

[ Komentarz  
Wyznaczymy – zastosujemy algorytm dzielenia wielomianów: ]  
stąd

Wynik:

Zatem:

[ Komentarz

Pozostałe pierwiastki wielomianu obliczymy korzystając z jego postaci iloczynowej, gdy znamy : ]

stąd:

FUNKCJE, CIĄGI, OPTYMALIZACJA

Zadanie 17. (0–1)  
 Dana jest funkcja f określona wzorem dla każdej liczby rzeczywistej x. Miejscem zerowym funkcji f jest .

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

A.

B.

C.

D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

## Zadanie 18. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik b jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zapisz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f

A. ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,

B. ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,

C. nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,

ponieważ

1. .

2. .

3. .

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A1

Zadanie 19.

Dana jest funkcja , której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych na rysunku. Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej

.

y

6

x

6

2

0

4

3

−5

−3

−6

Zadanie 19.1. (0–1)

Zapisz zbiór rozwiązań nierówności .

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

Zadanie 19.2. (0–1)

Zapisz maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest rosnąca.

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

Zadanie 19.3. (0–1)

Zapisz największą i najmniejszą wartość funkcji f.

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

Największa wartość funkcji fjest równa liczbie 6.

Najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie −6.

Zadanie 20. (0–2)

Dana jest funkcja , której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych na rysunku. Ta funkcja jest określona dla . Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f.

−5

−3

5

3

y

−2

6

x

2

0

Zadanie 20.1. (0-1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji

−5

−3

5

3

y

−2

6

x

2

0

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja g jest określona wzorem

A.

B.

Zadanie 20.2. (0-1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji

−5

−3

5

3

y

−2

6

x

2

0

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja h jest określona wzorem

A.

B.

Zasady oceniania

2 pkt – prawidłowe dokończenie obu zdań.

1 pkt – prawidłowe dokończenie jednego zdania.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie  
20.1 B, 20.2 A

## Zadanie 21.

Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej (o ile istnieje).

## Zadanie 21.1. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa , której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych na rysunku.

0

y

x

−3

4

1

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem

A.

B.

C.

D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

## Zadanie 21.2. (0–2)

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej należy punkt o współrzędnych . Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu , a jednym z miejsc zerowych funkcji jest .

Wyznacz i zapisz wzór funkcji w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci iloczynowej funkcji g oraz zapisanie jej

wzoru: .

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji g w postaci .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Zauważmy, że punkt przecięcia osi symetrii funkcji kwadratowej z osią jest środkiem odcinka, którego końcami są miejsca zerowe tej funkcji. Zatem: ]  
[ Komentarz

Zapiszemy wzór funkcji w postaci iloczynowej dla pewnego rzeczywistego współczynnika a: ]  
[ Komentarz

Obliczymy a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt zatem: ]  
[ Komentarz  
Wzór funkcji w postaci iloczynowej ma postać: ]

## Zadanie 22.

Koszykarz wykonał rzut do kosza. Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie ,  m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez punkt P o współrzędnych (7,01, h). Punkt P jest środkiem obręczy kosza.

Na rysunku przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.

P

7,01

 y, m

2,5

x, m

(0,0)

## Zadanie 22.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości h (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do  
 m)

A.  m  
B.  m  
C.  m  
D.  m

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

## Zadanie 22.2. (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku m.

1 pkt – zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli oraz prawidłowe podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie.

[ Komentarz

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Skorzystamy z gotowego wzoru na wierzchołek paraboli (zobacz w „Wybranych wzorach matematycznych”): ]

## Zadanie 22.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia współrzędnej oraz zapisanie wyniku m.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania .

1 pkt – zapisanie równania lub dwóch równań:

i .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie.

[ Komentarz

Zauważmy, że w momencie gdy piłka upadła i dotknęła parkietu, to punkt środka piłki należy do paraboli oraz znajduje się na wysokości m ponad parkietem. Zatem współrzędne środka piłki spełniają równanie paraboli, a współrzędna m. Zapiszemy układ równań i rozwiążemy go: ]

[ Komentarz  
Rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby: ]

Współrzędna x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu, jest równa w przybliżeniu m.

## Zadanie 23. (0–2)

Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym:

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu .

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu oraz ich sumy: .

1 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu :

.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Obliczymy cztery kolejne wyrazy ciągu, stosując kolejno wzór rekurencyjny: ]

[ Komentarz

Obliczymy sumę czterech kolejnych początkowych wyrazów: ]

## Zadanie 24. (0–2)

Dany jest ciąg określony wzorem ogólnym: dla każdej liczby naturalnej

.

Wykaż, że ciąg jest arytmetyczny.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. prawidłowe obliczenie różnicy kolejnych wyrazów oraz wykazanie, że jest stała i nie zależy od n.

1 pkt – zapisanie różnicy dwóch kolejnych wyrazów:

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie  
[ Komentarz  
Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała i nie zależy od n. Wyznaczymy wzór ogólny na wyraz ciągu: ]

[ Komentarz  
Obliczymy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu ): ] dla każdego   
To oznacza, że ciąg jest ciągiem arytmetycznym o różnicy .  
  
 Zadanie 25. (0–1)   
 Dokończ zdanie. Zapisz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.   
  
A. rosnący,  
B. malejący,  
C. stały,  
ponieważ dla każdej liczby naturalnej   
1. różnica  jest liczbą ujemną.  
2. różnica jest równa zero.  
3. różnica jest liczbą dodatnią.  
  
 Zasady oceniania  
1 pkt – odpowiedź poprawna.  
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.  
  
 Rozwiązanie  
A3  
  
[ Komentarz  
Zbadamy, jaki znak ma różnica: :

Ponieważ to , zatem:

To oznacza, że ciąg () jest rosnący. ]

## Zadanie 26. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem f(x) = dla każdej liczby rzeczywistej

Oblicz wartość m, dla której liczby , , są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania  
2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz podanie prawidłowego wyniku: .  
1 pkt – obliczenie/zapisanie wartości funkcji , , oraz wykorzystanie definicji albo własności ciągu geometrycznego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.  
  
 Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu: ]

[ Komentarz

Zastosujemy własność/definicję ciągu geometrycznego: ]  
Zatem:

## Zadanie 27.

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu zmniejsza się o połowę. Liczba jąder izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t, licząc od chwili , wyraża się zależnością wykładniczą:  
gdzie jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej .  
  
 Zadanie 27.1. (0–1)

Na rysunkach 1.–3. przedstawiono wykresy różnych zależności.

Na którym rysunku prawidłowo przedstawiono wykres zależności wykładniczej – opisanej we wstępie do zadania? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rysunek 1.

t

(0,0)

N0

T

N

Rysunek 2.

t

(0,0)

N0

T

N

Rysunek 3.

t

(0,0)

N0

T

N

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Rysunek 1.

## Zadanie 27.2. (0–3)

Czas połowicznego rozpadu węgla to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.  
Korzystając ze wzoru oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia t oraz podanie prawidłowego wyniku: t = 22800 lat

2 pkt – zapisanie równania: oraz wyznaczenie z niego .

1 pkt – poprawne zapisanie równania: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Podstawimy dane z zadania i przekształcamy równanie: ]

[ Komentarz  
Zgodnie z definicją funkcji wykładniczej, powyższa równość oznacza, że liczba podniesiona do potęgi musi dać w wyniku . Zatem: ]

[ Komentarz  
Obliczymy, ile lat liczy sobie znalezisko. Z powyższego równania wynika, że: ]

Znalezisko archeologiczne ma 22800 lat.

## Zadanie 28. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Długości boków oznaczono przez x i y. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (jak na rysunku). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.

y

y

x

Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów działki oraz podanie prawidłowych wyników:  m oraz  m.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole działki w zależności od jednej zmiennej oraz prawidłowe obliczenie współrzędnej wierzchołka paraboli:  m.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej w zależności od jednej zmiennej:

dla

1 pkt – zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej: lub

– zapisanie związku między wymiarami działki: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Całkowitą długość płotu – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem: ]  
[ Komentarz  
Powyższe równanie określa związek między wymiarami x i y. Wymiar y jednej działki musi być większy od 10 m, ze względu na ustaloną szerokość bramy wjazdowej. W związku z tym, w modelu matematycznym uwzględniającym warunki zadania, wymiary x i y spełniają: ]  
[ Komentarz  
Pole P całkowitej powierzchni magazynowej jest równe polu prostokąta o bokach długości x oraz 2y. Zatem: ]  
[ Komentarz  
Pole powierzchni magazynowej wyrazimy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu najpierw wyznaczymy y: ]  
[ Komentarz  
Następnie podstawimy wyznaczone y do wzoru na pole : ]

[ Komentarz  
Wyznaczymy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami x i y oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają:

Zatem:

]

Zmienna x może przyjmować wartości:

[ Komentarz  
Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli. Współrzędną x wierzchołka paraboli obliczymy z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, która jest równaniem tej paraboli. Rozwiążemy zatem równanie: ]  
Z powyższego równania wynika, że:

[ Komentarz   
Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, czyli dla: ]

[ Komentarz  
Obliczymy drugi wymiar działki, dla którego pole powierzchni magazynowej jest największe: ][ Komentarz  
Całkowite pole powierzchni magazynowej jest największe dla działki o wymiarach: ]  
x = 100 m oraz y =75 m.

PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

## Zadanie 29. (0–1) Dany jest kąt o mierze α taki, że |sin α| = oraz 90° < α < 180°

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1. Dla kąta spełnione jest równanie: cos α = .

2. Dla kąta spełnione jest równanie:

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1.P, 2.F

## Zadanie 30. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków , oraz miara kąta  
. Na rysunku kąt oznaczono symbolem .

Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

A

α

B

C

D

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD oraz prawidłowe obliczenie długości środkowej: .

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD:

lub

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosowanie twierdzenia cosinusów

Ponieważ AD jest środkową, to .

Do obliczenia długości środkowej zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

## Zadanie 31. (0–4)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r. Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (jak na rysunku). Długości boków AB i AC są równe odpowiednio  
 oraz .

Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta ABC.

A

S

B

C

D

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne obliczenie miar kątów trójkąta ABC:

, ,

3 pkt – poprawne obliczenie miar kątów w trójkącie DBC:

, ,

2 pkt – poprawne obliczenie miar pozostałych kątów trójkąta ADC:

,

1 pkt – zapisanie, że kąt

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przeanalizujemy zależności między odcinkami i kątami w przedstawionej sytuacji.

1. Kąt jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem , czyli trójkąt ADC jest prostokątny.

2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości boku:

3. Długość przeciwprostokątnej w trójkącie ADC jest dwa razy większa niż długość jednej z przyprostokątnych. Miary kątów tego trójkąt są równe 30°, 60°, 90° zatem:   
4. Zauważmy, że , zatem trójkąt DBC jest równoramienny. Z tego i poprzedniego faktu wynika, że

Z omówionych kroków 1.–4. wynika, że kąty w trójkącie ABC mają miary:

## Zadanie 32. (0–1)

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa . Punkt C leży na okręgu. Kąt jest ostry. Sytuację przedstawia rysunek.

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta jest równa

A.   
B.   
C.   
D.

A

C

B

S

k

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

## Zadanie 33. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC, w którym , , . Dwusieczna kąta przecina bok BC w punkcie D (jak na rysunku).

B

D

A

C

Dokończ zdanie. Zapisz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Długość odcinka jest równa

A.

B.

C.

ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że

1.

2.

3.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B3

## Zadanie 34. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że , a na boku BC wybrano taki punkt E, że (jak na rysunku). Pole trójkąta ABC jest równe 20. Kąt i oznaczono go symbolem .

Oblicz pole trójkąta DBE.

α

C

B

E

A

D

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE oraz podanie wyniku: .

2 pkt – wyprowadzenie i zapisanie zależności  oraz wzoru na pole trójkąta DBE: .

1 pkt – zastosowanie wzoru na pole trójkąta ABC z sinusem kąta oraz wyprowadzenie zależności

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

1. Zapiszemy wzór na pole trójkąta ABC i wykorzystamy dane zadania: ]  
[ Komentarz  
2. Zapiszemy wzór na pole trójkąta DBE i wykorzystamy warunek zadania: ]  
[ Komentarz  
3. Do otrzymanego wzoru na pole trójkąta DBE podstawimy wynik z punktu 1: ]

## Zadanie 35. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.   
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio:  
CAW1, ABW2, CBW3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W1, W2, W3.

Pola trójkątów: CAW1, ABW2, CBW3 oznaczymy odpowiednio jako P1, P2, P3.

Udowodnij, że: P3 = P1 + P2

W2

W1

W3

B

A

C

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe przeprowadzenie pełnego dowodu równania: .

2 pkt – zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta:  
, zapisanie sumy pól figur płaskich wyrażonej za pomocą długości boków trójkąta i jednego z pól: oraz zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC: lub

– prawidłowe wyprowadzenie i zapisanie wyrażenia postaci: .

1 pkt – zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta, np.:  
 lub zależności równoważnych.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz  
1. Wykorzystamy zależności między obwodami a polami figur płaskich podobnych: ]  
  
[ Komentarz  
2. Wykorzystamy fakt, że stosunki obwodów trójkątów podobnych są równe stosunkom długości podstaw tych trójkątów: ]  
[ Komentarz  
3. Z zależności 1. i 2. wynika: ]

[ Komentarz  
4. Obliczymy sumę : ]

[ Komentarz  
5. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:]

[ Komentarz  
 Zatem równanie w drugim wierszu pkt 4. można zapisać w postaci: ]

[ Komentarz  
Prawa strona powyższego równania, na mocy pkt 3., jest równa : ]  
To kończy dowód.

## Zadanie 36. (0–3)

Dany jest prostokąt ABCD, w którym . Kąt ma miarę , taką, że . Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (jak na rysunku).

Oblicz długość odcinka .

α

E

B

C

A

D

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowa metoda obliczenia długości odcinka EC oraz podanie prawidłowego wyniku: lub .

2 pkt – zapisanie zależności oraz prawidłowe obliczenie z twierdzenia Pitagorasa długości odcinka BD:

1 pkt – stwierdzenie, że trójkąty ABD i DEC są podobne oraz zapisanie zależności i obliczenie długości boku AB: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

1. Kąty , to kąty w trójkącie prostokątnym ABD, zatem:

2. W trójkątach prostokątnych ABD, ECD wyznaczymy kąty ostre. Skorzystamy z zależności, że oraz z własności kątów naprzemianległych.

Na podstawie cechy: kąt, kąt, kąt, stwierdzamy, że trójkąty ABD, ECD są podobne.

3. Ponieważ , to . Zatem .

4. Obliczymy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD:

5. Z podobieństwa trójkątów ABD, ECD obliczymy długość odcinka EC.

## Zadanie 37. (0–3)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A, a prosta l w punkcie B. Styczne k i l do tego okręgu, przecinają się w punkcie C (jak na rysunku).

Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

k

C

l

A

B

D

S

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przeprowadzenie pełnego dowodu podobieństwa trójkątów ACB i ASD. 2 pkt – zapisanie związków pomiędzy kątami: oraz

oraz zapisanie zależności wymienionych w kryterium za 1 pkt.

1 pkt – zapisanie, ze trójkąty ACB i ASD są równoramienne, oraz wskazanie / zapisanie równości odpowiednich ramion.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

1. Zauważmy, że trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie: .

[ Komentarz  
Ta równość odcinków stycznych wynika z faktu, że trójkąty SCB i SCA są przystające na mocy cechy: kąt, bok (bok CS), kąt (promień okręgu w punkcie styczności jest prostopadły do stycznej, a środek S okręgu leży na dwusiecznej kąta ). ]

2. Zauważmy, że trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie: (odcinki SD i SA są promieniami okręgu).

3. Oznaczymy . Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą i kącie środkowym opartym na tym łuku co cięciwa, mamy:

.

Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym otrzymujemy:

4. Ponieważ trójkąty ACB oraz ASD są równoramienne (zobacz pkt 1. i pkt 2.), stąd wynika, że:

5. Trójkąty ACB i ASD są podobne na mocy cechy: kąt, kąt, kąt.

## Zadanie 38. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: , , . Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R.

Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.

B

S

A

C

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie oraz podanie prawidłowego wyniku: .

2 pkt – obliczenie sinusa tego samego kąta.

1 pkt – obliczenie cosinusa jednego z kątów w trójkącie (np. ).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W celu obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie zastosujemy twierdzenie sinusów oraz twierdzenie cosinusów. Z twierdzenia cosinusów wyznaczymy cosinus wybranego kąta w trójkącie, następnie dla tego kąta oraz boku naprzeciwko tego kąta zastosujemy twierdzenie sinusów.

[ Komentarz   
1. Wprowadzimy oznaczenie: . Z twierdzenia cosinusów obliczymy : ]

[ Komentarz  
2. Z „jedynki trygonometrycznej” obliczymy : ]

[ Komentarz  
3. Zastosujemy twierdzenie sinusów do obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC: ]

zatem

## Zadanie 39. (0–1)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (jak na rysunku), w taki sposób, że:

, , .

Oblicz długość odcinka FE.

A

l

k

B

C

D

G

F

E

m

n

s

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie.

Zastosujemy twierdzenie Talesa:

## Zadanie 40.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych , dany jest okrąg O określony równaniem:

## Zadanie 40.1. (0–1)

Dokończ zdania 1. i 2. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych dla każdego zdania.

1. Środek S okręgu O ma współrzędne

A.

B.

C.

D.

2. Promień r okręgu O jest równy

E.

F.

G.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

AF

## Zadanie 40.2. (0–2)

Oblicz współrzędne x punktów przecięcia okręgu O z osią Ox.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zapisanie równania oraz prawidłowe rozwiązanie tego równania: .

1 pkt – wykorzystanie informacji, że okrąg O przecina oś Ox i poprawne zapisanie równania .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz   
Rozwiążemy układ dwóch równań, w którym jedno jest równaniem okręgu, a drugie jest równaniem osi Ox. Każdy punkt leżący na osi Ox ma współrzędne (x, 0), zatem dla każdej liczby rzeczywistej x. ]

## Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych , dane są okrąg O o środku w punkcie i prosta k o równaniu .

Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie P.

S

k

P

## Zadanie 41.1. (0–2)

Wyznacz i zapisz równanie okręgu O.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania okręgu oraz prawidłowe zapisanie równania okręgu: .

1 pkt – poprawna metoda obliczenia promienia okręgu oraz zapisanie wyniku: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz   
1. Zauważmy, że odległość punktu S od prostej k jest równa promieniowi okręgu O. Zastosujemy wzór na odległość punktu od prostej i obliczymy promień okręgu: ]

[ Komentarz  
2. Zapiszemy równanie okręgu: ]

Zadanie 41.2. (0–2)

Oblicz współrzędne punktu P, w którym okrąg O jest styczny do prostej k.  
  
 Zasady oceniania  
2 pkt – zapisanie układu złożonego z poprawnych równań prostych i oraz prawidłowe rozwiązanie tego układu i zapisanie wyniku: .

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S oraz zapisanie równania prostej lub

– zapisanie równania prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S, z poprawną wartością współczynnika kierunkowego tej prostej i błędną wartością wyrazu wolnego, oraz zapisanie układu złożonego z równań prostych k i .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

1. Oznaczmy przez prostą prostopadłą do prostej k. Punkt styczności okręgu O i prostej k jest punktem przecięcia się prostej k z prostą prostopadłą do niej i przechodzącą przez środek tego okręgu. Należy rozwiązać układ równań złożony z równań obu tych prostych. ]

[ Komentarz

2. Wyznaczymy równanie prostej – prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S: ]  
Prosta ma równanie:  
Punkt należy do prostej , zatem: stąd , więc

prosta ma równanie:

[ Komentarz  
3. Rozwiążemy układ równań:

## Zadanie 42. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są punkty A = (1,2) oraz B =(3,7). Punkty oraz są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie O = (0,0).

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty i jest równy

A.   
B.   
C.   
D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

## Zadanie 43.

Dany jest prostopadłościan ABCDEFGH, w którym prostokąty ABCD i EFGH są jego postawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.

## Zadanie 43.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną ADHE   
A.   
B.   
C.   
D.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

## Zadanie 43.2. (0–4)

W prostopadłościanie ABCDEFGH odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej BCGF. Długości odcinków poszczególnych przekątnych są równe: Kąt jest kątem między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy i ma miarę , taką, że.  
  
Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu ABCDEFGH.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola powierzchni całkowitej graniastosłupa oraz podanie prawidłowego wyniku: .

3 pkt – poprawne obliczenie długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu: ,  
, lub

– poprawna metoda obliczenia długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, błąd rachunkowy w obliczeniach i poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.

2 pkt – obliczenie długości dwóch krawędzi: , oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BGH: .

i zapisanie związku .

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCG:

oraz zapisanie związku lub

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz

Wprowadzimy oznaczenia dla odcinków: a, b – długości krawędzi podstawy prostopadłościanu, c – długość wysokości prostopadłościanu, e – przekątna ściany bocznej BCGF, d – przekątna tego prostopadłościanu

Warunki zadania zapiszemy jako: ]

[ Komentarz  
1. Wyznaczymy zależność między b a c w trójkącie BCG:]

[ Komentarz

2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCG, w celu obliczenia b i c: ]

Wykorzystamy związek z pkt. 1:  
zatem  
 oraz   
  
[ Komentarz  
3. Zauważmy, że trójkąt BGH jest prostokątny (kąt prosty jest przy wierzchołku G). Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BGH, w celu obliczenia a. ]

[ Komentarz  
4. Obliczymy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu: ]  
  
 Zadanie 44. (0–1)   
 Dane są dwa prostopadłościany podobne: B1 oraz B2. Objętość prostopadłościanu B1 jest równa V, a objętość prostopadłościanu B2 jest równa 27V. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B1 jest równe P.  
  
Dokończ zdanie. Zapisz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B2 jest równe  
A. ,  
B. ,  
C. ,  
ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy  
1. stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.  
2. pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.  
3. kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.  
  
 Zasady oceniania  
1 pkt – odpowiedź poprawna.  
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B3

## Zadanie 45. Dany jest stożek o średnicy podstawy  cm, wysokości cm i tworzącej l. Rysunek 1. przedstawia przekrój osiowy tego stożka.

Rysunek 1.

l

d

H

## Zadanie 45.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka ma miarę (w zaokrągleniu do )

A.   
B.   
C.   
D.

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 45.2. (0–3)

Powierzchnia boczna tego stożka jest wycinkiem koła (jak na rysunku 2.). Oblicz miarę kąta . Miarę tego kąta podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Rysunek 2.

α

B

S

l

A

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia miary kąta oraz podanie prawidłowego wyniku .

2 pkt – poprawne wyprowadzenie i zapisanie związku oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa:

1 pkt – zapisanie równania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz  
1. Zauważmy, że długość łuku AB jest równa długości (obwodowi) okręgu w podstawie stożka. Zastosujemy wzór na długość łuku AB oraz wzór na obwód okręgu: ]

2. Wyrazimy l poprzez H i d na podstawie z twierdzenia Pitagorasa: ]

[ Komentarz   
3. Zapiszemy wzór na miarę kąta i ją obliczymy: ]

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

## Zadanie 46. (0–2) Pojedynczy znak w piśmie Braille’a jest kombinacją sześciu wypukłych punktów. Pojedynczy znak musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.

## Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać pismem Braille’a.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie prawidłowej metody do obliczenia wszystkich znaków, uwzględnienie warunku zadania i podanie wyniku: 63.

1 pkt – zapisanie wzoru na liczbę wszystkich możliwych znaków bez uwzględnienia warunku zadania (tzn. łącznie ze znakiem bez punktu wypukłego): .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie  
[ Komentarz

Zastosujemy regułę mnożenia. Zauważmy, że utworzenie znaku polega na podjęciu kolejno 6 decyzji o tym, jaki ma być rodzaj punktu – elementu znaku. Punkt może być wypukły albo może nie być wypukły. Zatem mamy dwie możliwości wyboru każdego z punktów.

Zgodnie z regułą mnożenia, w takich przypadkach liczbę możliwości wyboru składnika/elementu obiektu mnożymy przez siebie tyle razy, z ilu elementów składa się obiekt: ]

[ Komentarz  
Wszystkich możliwości (łącznie z utworzeniem konfiguracji 6 braków wypukłości) jest 64. Ponieważ znak Braille’a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to wszystkich znaków jest: ]

## Zadanie 47.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie.

Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.

## Zadanie 47.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

A. 12  
B. 72  
C. 60

D. 720

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

## Zadanie 47.2. (0–3)

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania do obliczenia liczby zestawów z jednym elementem niebieskim i podanie prawidłowego wyniku: .

2 pkt – zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i prawidłowe obliczenie liczby zestawów w każdym takim przypadku: .

1 pkt – zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i prawidłowe obliczenie liczby zestawów w jednym takim przypadku: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W szafie znajdują się: 4 koszule, 3 pary spodni i 5 par butów.

Rozpiszemy schematy zestawów ubrań, w których jeden element jest niebieski.

[ Komentarz  
1. Gdy w zestawie jest niebieska koszula, to spodnie mogą być wybrane na 2 sposoby (bez niebieskich), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich). ]

Zestawów z niebieską koszulą jest:

[ Komentarz  
2. Gdy w zestawie są niebieskie spodnie, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich). ]

Zestawów z niebieskimi spodniami jest:

[ Komentarz   
3. Gdy w zestawie są niebieskie buty, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a spodnie na 2 sposoby (bez niebieskich). ]

Zestawów z niebieskimi butami jest:

[ Komentarz  
4. Zestaw z jednym elementem niebieskim może być: zestawem z niebieską koszulą lub zestawem z niebieskimi spodniami, lub zestawem z niebieskimi butami. ]

Zatem takich zestawów można wybrać:

## Zadanie 48. (0–4)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te będą obok siebie.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania czterocyfrowej, dodatniej liczby parzystej, w której zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te będą obok siebie, oraz podanie wyniku: .

3 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich oraz ile pośród nich jest liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra i dokładnie jedna cyfra i cyfry te są obok siebie oraz podanie prawidłowych wyników: , lub

– zapisanie oraz oraz prawidłowa metoda obliczenia – ile jest dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te są obok siebie, z błędem rachunkowym w obliczeniach.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest czterocyfrowych, dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te są obok siebie oraz podanie poprawnego wyniku: lub

– poprawna metoda obliczenia, ile jest czterocyfrowych, dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te są obok siebie, błąd rachunkowy w obliczeniach oraz poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich, i zapisanie wyniku:

1 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich, i zapisanie wyniku: lub

– rozpisanie zbioru zdarzeń sprzyjających z prawidłowo określonymi wszystkimi możliwymi pozycjami cyfr 2 i 3 oraz cyframi parzystymi na końcu lub

– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z układem cyfr 23 i dokładnie jedną cyfrą 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: lub

– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z układem cyfr 32 oraz dokładnie jedną cyfrą 2 i dokładnie jedną cyfrą 3 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych składa się ze wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich.

Obliczenia mocy zbioru .

Rozpisujemy schemat liczby czterocyfrowej, gdzie dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym określimy, ile jest możliwości jej uzupełnienia.

cyfra jedności – 10 możliwości wyboru  
cyfra dziesiątek – 10 możliwości wyboru  
cyfra setek – 10 możliwości wyboru  
cyfra tysięcy – 9 możliwości wyboru

Zgodnie z zasadą mnożenia, wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich jest:

Określimy zdarzenie jako zbiór takich czterocyfrowych dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 i cyfry te są obok siebie. Rozpiszemy schematy liczb czterocyfrowych, spełniających te warunki.

Liczby parzyste, które mają:   
- cyfrę 2 jako cyfrę tysięcy oraz cyfrę 3 jako setek

cyfra dzięsiątek – 8 możliwości {0,1, 4, 5, 6, 7, 8,9}  
cyfra jedności – 4 możliwości {0, 4, 6, 8}

- cyfrę 2 jako cyfrę setek oraz cyfrę 3 jako cyfrę dziesiątek

cyfra tysięcy – 7 możliwości {1, 4, 5, 6, 7, 8,9}  
cyfra jedności – 4 możliwości {0, 4, 6, 8}

- cyfrę 3 jako cyfrę tysięcy oraz cyfrę 2 jako cyfrę setek

cyfra dziesiątek – 8 możliwości {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8,9}  
cyfra jedności – 4 możliwości {0, 4, 6, 8}

- cyfrę 3 jako cyfrę setek oraz cyfrę 2 jako cyfrę dziesiątek

cyfra tysięcy – 7 możliwości {1, 4, 5, 6, 7, 8,9}  
cyfra jedności – 4 możliwości {0, 4, 6, 8}

- cyfrę 3 jako cyfrę dziesiątek oraz cyfrę 2 jako cyfrę jedności

cyfra tysięcy – 7 możliwości {1, 4, 5, 6, 7, 8,9}  
cyfra setek – 8 możliwości {0, 1, 4, 5, 6, 7, 8,9}

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia :

Zadanie 49. (0–3)

Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie liczba oczek mniejsza od 4, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie traci żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza.

Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza x liczbę żetonów.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia liczby x żetonów oraz zapisanie wyniku: żetonów.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku Grzegorza:

, lub

- poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła i stwierdzenie lub zapisanie, że jest ona równa zero, np.:

1 pkt – określenie i zapisanie prawdopodobieństw, z jakimi Paweł (lub Grzegorz) traci (lub zyskuje) liczbę 10 żetonów i liczbę x żetonów (samo zapisanie prawdopodobieństw zdarzeń, bez powiązania zdarzeń z odpowiednim zyskiem lub stratą i bez dalszych obliczeń, nie spełnia tego kryterium).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Uwaga! Zgodnie z konwencją, do obliczeń przyjmuje się, że strata to zysk ujemny.

Wyprowadzimy wyrażenie ze zmienną x na wartość oczekiwaną zysku z gry Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zaczniemy od Pawła.

[ Komentarz  
1. Określimy zdarzenia wraz z ich prawdopodobieństwami, dla których następuje wymiana żetonów w grze:

– zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych – wyników rzutu kostką do gry. ]

– zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek mniejsza od 4.

czyli

– zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek równa 6.

czyli  
 – zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek równa 4 lub 5.

czyli

[ Komentarz  
2. Zyski Pawła przy zajściu zdarzeń, , są następujące (zyski Pawła oznaczymy ): ]  
   
  
[ Komentarz

Prawdopodobieństwa osiągnięcia tych zysków są takie, jak prawdopodobieństwa zdarzeń, przy których te zyski zachodzą: ]

[ Komentarz  
3. Obliczymy wartość oczekiwaną zysku z gry Pawła. Skorzystamy ze wzoru na wartość oczekiwaną:

]

[ Komentarz  
4. Analogicznie zapiszemy wyrażenie na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zyski Grzegorza przy zajściu zdarzeń , , są następujące (zyski Grzegorza oznaczymy ): ]

Zatem wartość oczekiwana zysku z gry Grzegorza dana jest wzorem:   
  
[ Komentarz  
5. Zgodnie z warunkiem zadania, wartości oczekiwane zysku z gry Pawła i Grzegorza są sobie równe, zatem: ]

[ Komentarz   
6. Zauważmy, że ta gra ma następującą szczególną własność: zysk jednego gracza jest stratą dla drugiego gracza. To oznacza, że wartości oczekiwane zysków Pawła i Grzegorza muszą być liczbami przeciwnymi, a z warunków zadania wynika – że muszą być liczbami równymi sobie. To oznacza, że wartości oczekiwane zysków z gry każdego z graczy są równe 0: ]

Uwaga

Fakt, że wartości oczekiwane zysków obu graczy są równe, nie oznacza, że żaden z nich nie osiągnie realnie w rezultacie gry większego zysku. Gra jest losowa, więc może zaistnieć sytuacja, że podczas całej gry będą wypadały kolejno same szóstki i Grzegorz będzie zyskiwał zawsze po 30 żetonów. Równość wartości oczekiwanych oznacza – w rozumieniu potocznym – że żaden z graczy nie ma „statystycznej przewagi” w osiągnięciu większego zysku.

Zadanie 50.

W tabeli podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie F.

Oznaczenie tabeli  
L – liczba pracowników  
W – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników podane w tys. zł.

|  |  |
| --- | --- |
| L | W |
| 1 | 1,5 |
| 1 | 2 |
| 4 | 2,5 |
| 7 | 3 |
| 10 | 3,5 |
| 14 | 4 |
| 13 | 4,5 |
| 9 | 5 |

Zadanie 50.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zapisz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie F jest

A. 10 tys. zł,  
B. 4,5 tys. zł,  
C. 4 tys. zł,  
ponieważ

1. tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie F.  
2. ta wartość zarobków jest największa w firmie F.  
3. iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie F.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C1

Zadanie 50.2. (0–1)

Określ i zapisz ile wynosi mediana miesięcznych zarobków w firmie F.

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

Medianą miesięcznych zarobków w firmie F jest 4 tys. zł.

[ Komentarz

Medianą zarobków jest wartość znajdująca się po środku w uporządkowanym rosnąco zestawie zarobków wszystkich 59 pracowników firmy F. Zatem będzie to wartość 4 tys. zł, znajdująca się na 30 pozycji w tak uporządkowanym zestawie danych. ]  
  
 Zadanie 50.3. (0–2)

Oblicz, jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 4,5 tys. zł lub mniej.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 4,5 tys. zł lub mniej oraz podanie wyniku 85%.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 4,5 tys. zł lub mniej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie  
[ Komentarz

Obliczymy, ile jest łącznie takich osób w firmie F, które zarabiają miesięcznie 4,5 tys. zł lub mniej: ]  
[ Komentarz  
Określimy, jaki procent wszystkich osób w firmie stanowią łącznie osoby zarabiające miesięcznie 4,5 tys. zł lub mniej: ]

Osób w firmie F zarabiających 4,5 tys. zł lub mniej jest 85%.

Zadanie 50.4. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy F. Wynik podaj bez zaokrąglania.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej miesięcznych zarobków oraz podanie

prawidłowego wyniku:

1 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej miesięcznych zarobków: obliczenie sumy

iloczynów wartości zarobków i liczby osób osiągających te zarobki oraz podzielenie tej sumy

przez liczbę wszystkich pracowników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

[ Komentarz  
Na podstawie danych z wykresu obliczymy średnią miesięcznych zarobków pracowników firmy F: ]