Matematyka

Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zostały opracowane na dwóch poziomach:

- podstawowym – *Arkusz I* (MMA-P1_1P-122)
- rozszerzonym – *Arkusz II* (MMA-R1_1P-122)

Arkusz I zawierał 34 zadania, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych (6 krótkiej odpowiedzi i 3 rozszerzonej odpowiedzi). Zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 170 minut.

Arkusz II zawierał 11 zadań otwartych, za których rozwiązanie zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 180 minut.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu podstawowego i rozszerzonego.

Analiza jakościowa

Arkusz I - zadania zamknięte

W maju 2010 roku na egzaminie maturalnym z matematyki po raz pierwszy pojawiły się zadania zamknięte i corocznie głównie to one decydują o odsetku sukcesów na egzaminie z poziomu podstawowego. W 2012 roku 73,9% ogółu zdających za zadania zamknięte uzyskało 15 i więcej punktów, co gwarantowało zdanie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki.

Tylko dwa zadania (1. i 23.) spośród zadań zamkniętych były dla zdających trudne. Najtrudniejszym z nich okazało się zadanie 23. (wskaźnik łatwości dla ogółu zdających – 0,47), w którym zdający miał wskazać punkt należący do okręgu o danym równaniu. Jest to zaskakujące nie tyko dlatego, że ten problem łatwo rozwiązać, wykonując odpowiedni rysunek, ale i dlatego, że również rozwiązanie algebraiczne sprowadzało się do elementarnych obliczeń.

W tym roku żadne z zadań zamkniętych nie było dla ogółu zdających bardzo łatwe. Najłatwiejszym okazało się zadanie 5 (wskaźnik łatwości – 0,89), które wymagało wybrania jednej liczby, spośród czterech podanych, spełniającej równanie z wartością bezwzględną. Pozostałe zadania znalazły się w grupie zadań umiarkowanie trudnych (2., 4., 8., 11., 15., 19., 21., 24.,) albo łatwych (3., 5., 6., 7., 9., 10., 12., 13., 14., 16., 17., 18., 20., 22., 25.).

Zadanie 1. ***(1 pkt)***

Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44% **B.** 50% **C.** 56% **D.** 60%

Sprawdzana umiejętność
Wykonanie obliczeń procentowych (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,49	0,53	0,29	0,28	0,44	0,23

Poprawna odpowiedź: **A.**

Zadanie 2. ***(1 pkt)***

Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. -8 **B.** -4 **C.** 2 **D.** 4

Sprawdzana umiejętność
Zastosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,54	0,62	0,36	0,31	0,44	0,28

Poprawna odpowiedź: **B.**

Zadanie 3. ***(1 pkt)***

Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $19-10\sqrt{2}$ **B.** $17-4\sqrt{2}$ **C.** $15+14\sqrt{2}$ **D.** $19+6\sqrt{2}$

Sprawdzana umiejętność
Wykonanie obliczeń na liczbach wymiernych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,78	0,87	0,54	0,32	0,70	0,29

Poprawna odpowiedź: **A.**

Zadanie 4. ***(1 pkt)***
Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Sprawdzana umiejętność Obliczenie wartości logarytmu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,67	0,77	0,47	0,26	0,54	0,24
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1| = 4x$.

A. $x = -1$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -2$

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do rozwiązania równania (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,89	0,92	0,80	0,74	0,87	0,73
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 6. ***(1 pkt)***
Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2 + 3x - 7 = 0$. Suma $x_1 + x_2$ jest równa

A. $-\frac{7}{2}$ **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{3}{4}$

Sprawdzana umiejętność Obliczenie sumy rozwiązań równania kwadratowego (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,72	0,79	0,52	0,42	0,63	0,34
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 7. ***(1 pkt)***
Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x-7)(x+2)$ są

A. $x = 7,\ x = -2$ **B.** $x = -7,\ x = -2$ **C.** $x = 7,\ x = 2$ **D.** $x = -7,\ x = 2$

Sprawdzana umiejętność Odczytanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej z postaci iloczynowej (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,86	0,91	0,75	0,56	0,82	0,51
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 8. ***(1 pkt)***

Funkcja liniowa *f* jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek

A. $f(1) > 1$ **B.** $f(2) = 2$ **C.** $f(3) < 3$ **D.** $f(4) = 4$

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (standard II).

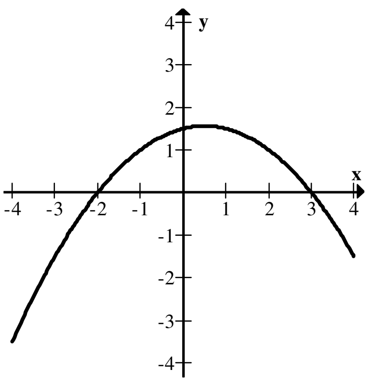
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,59	0,65	0,46	0,37	0,51	0,37

Poprawna odpowiedź: **A.**

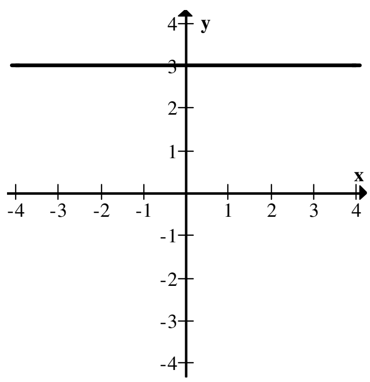
Zadanie 9. ***(1 pkt)***

Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

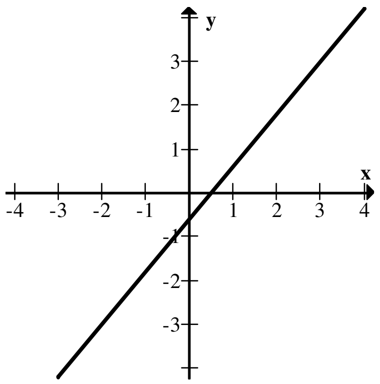
A.



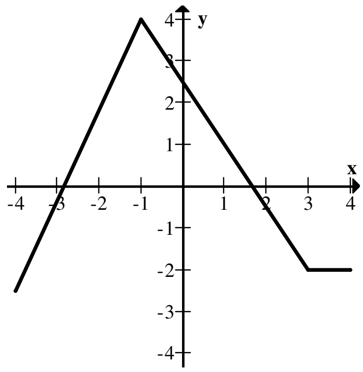
B.



C.



D.



Sprawdzana umiejętność
Odczytanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,77	0,84	0,58	0,43	0,70	0,43

Poprawna odpowiedź: **C.**

Zadanie 10 ***(1 pkt)***
Liczba $\mathrm{tg}\,30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa

A. $\sqrt{3}-1$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

Sprawdzana umiejętność
Planowanie i wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,82	0,88	0,65	0,45	0,75	0,43

Poprawna odpowiedź: **D**.

Zadanie 11. ***(1 pkt)***
W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{13}{12}$

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie definicji do wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,68	0,76	0,54	0,28	0,58	0,27

Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 12. ***(1 pkt)***
W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6 **B.** $2\sqrt{21}$ **C.** $2\sqrt{29}$ **D.** 14

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,87	0,92	0,74	0,50	0,83	0,54

Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 13. ***(1 pkt)***
W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy

A. $16\sqrt{6}$ **B.** $14\sqrt{6}$ **C.** $12+4\sqrt{6}$ **D.** $12+2\sqrt{6}$

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,83	0,89	0,66	0,50	0,78	0,45

Poprawna odpowiedź: **D**.

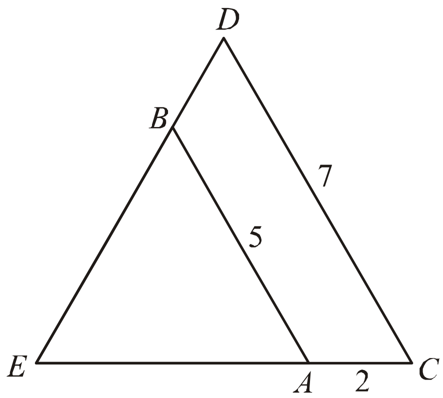
Zadanie 14. ***(1 pkt)***
Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5



Sprawdzana umiejętność
Posłużenie się własnościami figur podobnych do obliczenia długości odcinków (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,84	0,87	0,78	0,77	0,81	0,79

Poprawna odpowiedź: **D**.

Zadanie 15. ***(1 pkt)***
Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

A. 25 **B.** 50 **C.** 75 **D.** 100

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością jego boku (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,60	0,69	0,30	0,27	0,48	0,28

Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 16. ***(1 pkt)***

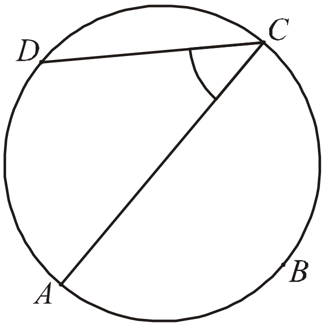
Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa

A. $90°$

B. $60°$

C. $45°$

D. $30°$



Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie związku między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,83	0,86	0,70	0,68	0,80	0,70
Poprawna odpowiedź: **C.**					

Zadanie 17. ***(1 pkt)***

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. $40°$ **B.** $50°$ **C.** $60°$ **D.** $70°$

Sprawdzana umiejętność Obliczenie wyrazów ciągu arytmetycznego (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,72	0,79	0,48	0,37	0,66	0,37
Poprawna odpowiedź: **C.**					

Zadanie 18. ***(1 pkt)***

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ **B.** $\frac{3}{25}$ **C.** $-\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{7}{25}$

Sprawdzana umiejętność Obliczenie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,79	0,86	0,64	0,49	0,73	0,44
Poprawna odpowiedź: **B.**					

Zadanie 19. ***(1 pkt)***
Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 6 **B.** 8 **C.** 24 **D.** 64

Sprawdzana umiejętność Obliczenie objętości sześcianu z wykorzystaniem związków miarowych w sześcianie (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,66	0,76	0,40	0,27	0,56	0,23
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 20. ***(1 pkt)***
Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 16π **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 8π

Sprawdzana umiejętność Wyznaczenie wysokości stożka z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych lub własności kwadratu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,79	0,86	0,59	0,44	0,71	0,40
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$.

A. $y = \frac{1}{2}x$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x$ **C.** $y = 2x$ **D.** $y = -2x$

Sprawdzana umiejętność Wskazanie równania prostej równoległej do danej (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,63	0,71	0,45	0,34	0,53	0,33
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 22. ***(1 pkt)***

Punkt A ma współrzędne $(5,2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi Oy. Punkt C ma współrzędne

A. $(-5,-2012)$ **B.** $(-2012,-5)$ **C.** $(-5,2012)$ **D.** $(-2012,5)$

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie pojęcia układu współrzędnych na płaszczyźnie (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,75	0,80	0,57	0,42	0,70	0,44

Poprawna odpowiedź: **A.**

Zadanie 23. ***(1 pkt)***

Na okręgu o równaniu $(x-2)^2+(y+7)^2=4$ leży punkt

A. $A=(-2,5)$ **B.** $B=(2,-5)$ **C.** $C=(2,-7)$ **D.** $D=(7,-2)$

Sprawdzana umiejętność
Zbadanie, czy dany punkt spełnia równanie okręgu (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,47	0,58	0,23	0,20	0,34	0,13

Poprawna odpowiedź: **B.**

Zadanie 24. ***(1 pkt)***

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru.
Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19

Sprawdzane umiejętności
Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, zastosowanie zasady mnożenia (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,68	0,74	0,52	0,46	0,61	0,44

Poprawna odpowiedź: **C.**

Zadanie 25. ***(1 pkt)***
Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa

A. 400 zł **B.** 500 zł **C.** 600 zł **D.** 700 zł

Sprawdzana umiejętność
Obliczenie średniej arytmetycznej i interpretowanie tego parametru w kontekście praktycznym (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,86	0,90	0,67	0,62	0,83	0,60

Poprawna odpowiedź: **D**.

Arkusz I - zadania otwarte krótkiej i rozszerzonej odpowiedzi

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania (z uwzględnieniem kryteriów oceniania zdających ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki) zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/klucze/matemat_pp_klucz.pdf

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.

Sprawdzana umiejętność

Rozwiązanie nierówności kwadratowej (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,70	0,78	0,53	0,27	0,63	0,25

Przykładowy zapis rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + 8x + 15$.

Obliczamy $\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4$ oraz $x_1 = \frac{-8-2}{2} = -5$ oraz $x_2 = \frac{-8+2}{2} = -3$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $3x^2 - 10x + 3 \le 0$: $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = -5$, $x = -3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 + 8x + 15$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+3)(x+5) > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy zapisze zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -5, x_2 = -3$ i zapisze, np. $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$ popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, -3) \cup (-5, \infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających i było jednym z dwóch najłatwiejszych zadań otwartych w tym zestawie egzaminacyjnym.

Tylko 53,3% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania.

Część zdających prawidłowo wyznaczała pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale błędnie

podawała zbiór rozwiązań nierówności, np. wskazując obliczone pierwiastki jako zbiór rozwiązań tej nierówności. Dość często pojawiały się rozwiązania, w których zdający błędnie zapisywali zbiór rozwiązań nierówności, np. w postaci przedziału $(-5,-3)$ lub $\left(-\infty,-5\right\rangle \cup \left\langle -3,\infty\right)$. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.
Niestety, grupa około 12,6% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie tej nierówności kwadratowej, mimo iż ten typ zadania pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.

Zadania 27. ***(2 pkt)***
Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0<a<b<c$, to $\frac{a+b+c}{3}>\frac{a+b}{2}$.

Sprawdzana umiejętność
Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,19	0,26	0,05	0,02	0,09	0,01

Przykładowy zapis rozwiązania
Mnożymy obie strony nierówności przez 6:

$$2(a+b+c)>3(a+b)$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2c>a+b$$

Uzyskana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej, zatem wystarczy wykazać jej prawdziwość. Z założenia wiemy, że $c>a$ oraz $c>b\cdot$ Wobec tego

$$2c=c+c>a+b$$

Co należało wykazać.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

jeśli przekształci podaną nierówność do postaci $2c>a+b$ lub $(c-a)+(c-b)>0$, lub $\frac{-a-b+2c}{6}>0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

jeśli przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

Komentarz
Zadanie okazało się bardzo trudne dla ogółu zdających. Tylko 8% maturzystów poprawnie wykorzystało założenia i uzasadniło prawdziwość podanej nierówności algebraicznej. Najczęściej zdający przekształcali tę nierówność do postaci $2c>a+b$ i na tym kończyli dowód. Za takie rozwiązanie uzyskiwali 1 punkt.
Niestety aż 70,1% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, bądź za przedstawione rozumowanie uzyskało 0 punktów. Niektórzy popełniali błędy już na etapie początkowych przekształceń algebraicznych, np.

$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$

$3(a+b) > 2(a+b+c)$.

Nadal pojawiały się niepoprawne rozwiązania, w których zdający dowodzili tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowali na tej podstawie o jej prawdziwości dla wszystkich liczb rzeczywistych spełniających podane założenie.

Warto podkreślić, że odnotowano również nietypowe, inne od opisanych w schemacie, sposoby rozwiązania. Oto przykład rozumowania przedstawionego przez jednego ze zdających:

Jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to możemy je zapisać w postaci a, $b = a + x$, $c = a + y$, przy czym $y > x > 0$.

Udowodnimy, że $\frac{a+a+x+a+y}{3} > \frac{a+a+x}{2}$.

Przekształcamy tożsamościowo tę nierówność:

$\frac{3a+x+y}{3} > \frac{2a+x}{2}$

$6a + 2x + 2y > 6a + 3x$

$2y > x$, co jest prawdą, ponieważ $y > x$.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Sprawdzana umiejętność

Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,57	0,69	0,30	0,13	0,43	0,08

Przykładowy zapis rozwiązania

Przedstawiamy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania:

$$W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2(x+4) - 9(x+4) = (x+4)(x-3)(x+3).$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są zatem

$$x_1 = -4,\ x_2 = 3 \text{ oraz } x_3 = -3.$$

Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba $x = -3$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynu, np.: $W(x) = (x^2 - 9)(x+4)$ lub $W(x) = (x+4)(x-3)(x+3)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu: $x = -3$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Bezbłędnie rozwiązało je 55,2% zdających. Rozwiązujący to zadanie z reguły dokonywali rozkładu wielomianu na czynniki metodą grupowania lub dzielenia wielomianu przez dwumian, a następnie z postaci iloczynowej odczytywali trzeci pierwiastek wielomianu. Sporadycznie pojawiały się rozwiązania z wykorzystaniem wzorów Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego:

$(-4)\cdot 3\cdot x_3 = -\frac{-36}{1}$, stąd $x_3 = -3$.

Natomiast 41% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, bądź za przedstawione rozumowanie uzyskało 0 punktów. Nadal pojawiały się prace, w których zdający nie potrafili dokonać rozkładu wielomianu na czynniki, mimo to niejednokrotnie podawali poprawną odpowiedź, np.

$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2(x+4) - 9(x-4) = (x-4)(x^2-9) = (x-4)(x-3)(x+3)$

Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba $x = -3$.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$.

Sprawdzana umiejętność

Wykorzystanie własności symetralnej odcinka do wyznaczenia jej równania (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,29	0,39	0,05	0,01	0,15	0,00

Przykładowy zapis rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $\frac{10-2}{2-(-2)} = 2$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* jest równy $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Symetralna odcinka AB ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$. Punkt $S = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2}\right) = (0,6)$ jest środkiem odcinka AB.

Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $6 = -\frac{1}{2}\cdot 0 + b$. Stąd $b = 6$, a więc symetralna odcinka *AB* ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

- gdy poprawnie wyznaczy współrzędne środka odcinka AB: $S=(0,6)$ oraz współczynnik kierunkowy prostej AB: $a=2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu współrzędnych środka odcinka albo współczynnika kierunkowego prostej AB i konsekwentnie wyznaczy równanie symetralnej.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{1}{2}x+6$ lub $x+2y-12=0$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów i wyznaczy konsekwentnie równanie symetralnej odcinka AB, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

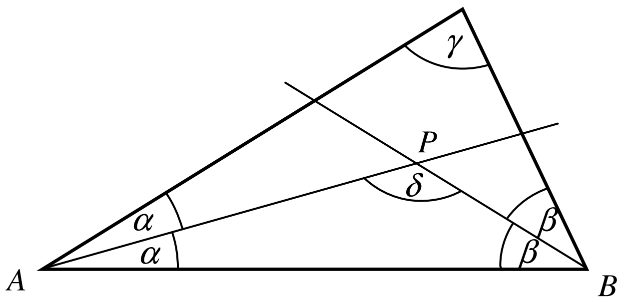
Tradycyjnie zadania z geometrii analitycznej należą do grupy zadań o najniższym stopniu wykonalności, również to zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Sprawdzało, czy zdający znają pojęcie symetralnej odcinka i potrafią wykorzystać jej własności w ujęciu geometrii analitycznej. Niestety, tylko 25,4% zdających rozwiązało ten problem bezbłędnie, z reguły stosując zaprezentowany powyżej sposób rozwiązania (wyznaczenie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez środek odcinka AB). Natomiast aż 68,3% zdających nie podjęło próby wyznaczenia równania symetralnej odcinka AB, bądź za przedstawione rozumowanie uzyskało 0 punktów.
Zdający, którzy uzyskali za rozwiązanie tego zadania 1 punkt z reguły ograniczali się do wyznaczenia współrzędnych środka odcinka AB i równania prostej AB. Nie potrafili natomiast zapisać współczynnika kierunkowego prostopadłej do prostej AB lub popełniali błędy wykorzystując współrzędne środka odcinka.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.

Sprawdzana umiejętność
Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,10	0,14	0,00	0,01	0,03	0,00

Przykładowy zapis rozwiązania
Niech $|\angle BAC| = 2\alpha$, $|\angle ABC| = 2\beta$, $|\angle ACB| = \gamma$, $|\angle APB| = \delta$.



Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest 180°, więc w trójkącie ABC mamy $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$.

Ponieważ $\gamma > 0°$, więc $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta < 90^\circ$.

W trójkącie ABP mamy $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$.

Stąd i z otrzymanej nierówności $\alpha + \beta < 90^\circ$ wynika, że $\delta > 90^\circ$.

Oznacza to, że kąt APB jest kątem rozwartym.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt APB jest kątem rozwartym.

Komentarz
Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających i było najtrudniejszym w tym zestawie egzaminacyjnym.
Do udowodnienia tezy wystarczyło zauważyć, że suma miar dwóch dowolnych kątów w trójkącie jest mniejsza od 180°, a następnie wykorzystać własności dwusiecznych tych kątów. Poprawną argumentację podało tylko 9,6% ogółu zdających. Pozostali maturzyści (90,4%) nie podjęli próby uzasadnienia, że kąt APB jest rozwarty, bądź za przedstawione rozumowanie uzyskali 0 punktów. Niektórzy zdający przyjmowali na przykład, że:

- trójkąt ABC jest równoboczny,
- kąty A i B są kątami ostrymi,
- dwusieczne kątów A i B są prostopadłe odpowiednio do boków BC i AC,
- punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC,

tym samym nie rozwiązywali przedstawionego w zadaniu problemu.
Kolejny raz okazało się, że rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów trudne, niezależnie od złożoności strategii czy rozumowania, które powinni przeprowadzić.

Zadanie 31. *(2 pkt)*
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Sprawdzana umiejętność
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,54	0,61	0,35	0,14	0,48	0,14

Przykładowy zapis rozwiązania
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) dwóch liczb ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7\cdot 7 = 49$.
Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6, gdy:
- jedna z tych liczb jest równa 6 (wówczas druga jest dowolna)

albo
- jedną z liczb jest 3, a drugą jest 2 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa
$|A| = (2\cdot 7-1)+2\cdot 2 = 17$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A)=\frac{17}{49}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo
- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 17$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{17}{49}$.

Komentarz
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla ogółu zdających.
Tylko 39,3% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie i aż 31,1% zdających nie podjęło próby jego rozwiązania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.
Rozwiązując to zadanie, zdający najczęściej stosowali klasyczną definicję prawdopodobieństwa. W takich rozwiązaniach błędy pojawiały się już na etapie zliczania wszystkich zdarzeń elementarnych, np. niektórzy maturzyści zapisywali $|\Omega| = 14$ lub $|\Omega| = 7^2 = 14$. Jednak najwięcej problemów sprawiło zdającym zliczenie zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A. Najczęściej zdający pomijali niektóre z tych zdarzeń, np. nie zauważali, że zdarzenie $(7,6)$ sprzyja zajściu zdarzenia A i zapisywali np. $|A| = 16$. Zaskakiwał fakt, że część zdających nieprawidłowo zliczała liczbę zdarzeń

elementarnych, sprzyjających danemu zdarzeniu, pomimo poprawnego ich wypisania lub zaznaczenia w tabeli.
Mniejsza część populacji zdających wybierała rozwiązania z wykorzystaniem drzewa stochastycznego. W tym sposobie rozwiązania zdający najczęściej popełniali różne błędy:

- narysowane drzewa nie zawierały istotnych gałęzi, były niekompletne,
- na istotnych gałęziach drzewa nie było zapisanych prawdopodobieństw,
- przy obliczaniu prawdopodobieństwa brano pod uwagę gałęzie, które nie spełniały warunków zadania,
- dodawano prawdopodobieństwo na gałęziach drzewa.

W wielu przedstawionych rozwiązaniach zabrakło refleksji nad otrzymanym wynikiem, stąd część zdających zapisywała, że prawdopodobieństwo jest liczbą większą od 1. Za takie rozwiązanie zdający otrzymywali 0 punktów.

Zadanie 32. ***(4 pkt)***
Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Sprawdzana umiejętność
Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,73	0,82	0,49	0,20	0,64	0,20

Przykładowy zapis rozwiązania
Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, zatem $2x = 9 + 19$, $x = 14$.
Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem $42^2 = 14 \cdot y$ i $y^2 = 42 \cdot z$.
Stąd $y = \frac{1764}{14} = 126$ i $126^2 = 42 \cdot z$, czyli $z = 378$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub $2x = 9 + 19$, lub $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie $x = 14$ i zapisanie równania $42^2 = 14 \cdot y$ lub $1764 = 14 \cdot y$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie $y = 126$ i zapisanie równania $y^2 = 42 \cdot z$ lub $126^2 = 42 \cdot z$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

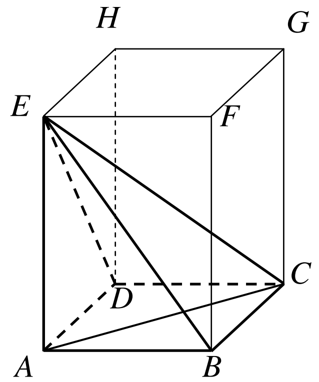
Komentarz
Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających i było najłatwiejszym zadaniem otwartym w tym zestawie egzaminacyjnym.
Zadania wymagające zastosowania własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego wielokrotnie pojawiały się w zestawach egzaminacyjnych, zarówno jako zadania krótkiej, jak i rozszerzonej odpowiedzi. Mimo to 18,9% zdających nie uzyskało żadnego punktu za rozwiązanie tego zadania, bądź nie podjęło próby jego rozwiązania.
Zdający, którzy dokonali w zadaniu istotnego postępu zazwyczaj rozwiązywali to zadanie bezbłędnie, aż 67,7% zdających uzyskało za przedstawione rozwiązanie maksymalną ilość punktów.

Zadanie 33. *(4 pkt)*
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.

Sprawdzana umiejętność
Obliczenie objętości wielościanu (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,48	0,58	0,20	0,07	0,36	0,08

Przykładowy zapis rozwiązania



<u>a) Obliczenie pola podstawy ostrosłupa</u>

Podstawa $ABCD$ ostrosłupa jest kwadratem o boku AB. Stosując wzór na przekątną kwadratu, mamy $4 = |AB|\sqrt{2}$, stąd $|AB| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy pole P podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

<u>b) Obliczenie wysokości AE ostrosłupa</u>

W trójkącie EAC mamy $|AC| = 4$ i $|\sphericalangle ACE| = 60^\circ$, stąd $|AE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

<u>c) Obliczenie objętości ostrosłupa</u>

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie wysokości AE ostrosłupa: $|AE| = 4\sqrt{3}$ albo obliczenie pola P podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie pola podstawy i wysokości ostrosłupa.

<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający obliczy jedną z tych wielkości z błędem rachunkowym, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>
Nie obniżamy punktacji zadania za błędy wynikające z nieuwagi, np. gdy zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu objętości podstawił błędną wartość.

Komentarz
Zadanie, które sprawdzało umiejętność wyznaczenia związków miarowych w ostrosłupie, okazało się trudne dla ogółu zdających.
Bezbłędnie rozwiązało je 31,5% zdających, a 35,1% – nie podjęło próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.
Zdający pokonali zasadnicze trudności zadania, gdy obliczyli pole podstawy i wysokość przedstawionego na rysunku ostrosłupa. Ten etap poprawnie wykonało 44,8 % zdający. Niestety aż 13,3% ogółu zdających popełniło błąd zapisując wzór na objętość ostrosłupa $ABCDE$ lub nie potrafiło go poprawnie zastosować. Niektórzy zdający popełniali błędy już na etapie analizy zadania, np. źle zaznaczali na rysunku kąt ACE lub niepoprawnie stosowali definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Pojawiały się liczne błędy rachunkowe związane z wykorzystaniem tw. Pitagorasa w trójkącie ACE lub obliczeniem pola podstawy ostrosłupa.

Zadanie 34. *(5 pkt)*
Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Sprawdzana umiejętność
Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do rozwiązania równania kwadratowego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,40	0,52	0,13	0,02	0,25	0,03

Przykładowy zapis rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, v – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu:

$$\begin{cases} t\cdot v=210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy go do postaci równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.: $4t^2-4t-35=0$.

Stąd otrzymujemy $t_1=\frac{4-24}{8}=-\frac{5}{2}$ lub $t_2=\frac{4+24}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$. Zauważamy, że t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.
Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny: $3{,}5-1=2{,}5$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 pkt**
Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$$(t-1)(v+24)=210$$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, a v średnią prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę,
lub

$$(t+1)(v-24)=210$$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg pospieszny, a v średnią prędkość pociągu pospiesznego w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$\begin{cases} t\cdot v=210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t\cdot v=210 \\ (t+1)\cdot(v-24)=210 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą v lub t, np.:

$$(t-1)\cdot\left(\frac{210}{t}+24\right)=210 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{210}{v}-1\right)\cdot(v+24)=210 \quad \text{lub} \quad 24(t-1)\cdot t=210.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie czasu pokonania drogi przez pociąg pospieszny

albo

- obliczenie czasu jazdy pociągu osobowego: $t = 3{,}5$ i nie obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny: 2,5 godziny.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v + 24 = \frac{210}{t-1}$$

$$\begin{cases} 210 = v \cdot t \\ 210 = (v+24)t - 1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t-1$ w nawias. Zapis równania $v + 24 = \frac{210}{t-1}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v + 24 = \frac{210}{t-1} \qquad \begin{cases} v = \frac{210}{t} \\ v + 24 = \frac{210}{t-1} \end{cases} \qquad \frac{120}{t} + 24 = \frac{210}{t-}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{120}{t} + 24 = \frac{210}{t-}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 210 i pominął liczbę 1 w mianowniku ułamka.

Przykład 3.
Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $4t^2 + 4t - 35 = 0$ zamiast równania $4t^2 - 4t - 35 = 0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realnym czasem jazdy pociągu pospiesznego, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.

Komentarz

Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających.

Bezbłędnie rozwiązało je 28,1% zdających, a prawie 49,7% – nie podjęło próby rozwiązania tego zadania bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.

Zadanie wykorzystujące zależność droga – prędkość – czas po raz kolejny znalazło się w zestawie egzaminacyjnym z poziomu podstawowego. Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi poprawnie opisać tę sytuację w języku matematyki, a następnie rozwiązać odpowiednie równania i zinterpretować otrzymane wyniki. Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Prawie 48% zdających nie miało trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji, czyli dokonało istotnego postępu w zadaniu. Niestety, w dalszej części rozwiązania nie wszyscy zdający potrafili rozwiązać zapisany układ równań, pojawiały się błędy logiczne i rachunkowe. Kolejny raz okazało się, że przekształcenia algebraiczne nie są mocną stroną zdających.

Arkusz II

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteriach oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:
http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/klucze/matemat_pr_klucz.pdf

Zadanie 1. ***(4 pkt)***
Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

Sprawdzana umiejętność
Rozwiązanie zadania prowadzącego do rozwiązania równania kwadratowego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,80	0,83	0,62

Przykładowy zapis rozwiązania
Niech a oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to: $a+1$, $a+2$, $a+3$.
Zapisujemy zatem równanie kwadratowe

$$a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$$

które po przekształceniu przyjmuje postać

$$3a^2+5a+2=0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $a_1=-1$, $a_2=-\frac{2}{3}$. Rozwiązanie $-\frac{2}{3}$ odrzucamy jako sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita).
Zatem szukane liczby to: -1, 0, 1, 2.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie kolejnych czterech liczb całkowitych, np.: a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, gdzie a jest liczbą całkowitą.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania... 2 pkt
Zapisanie równania z jedną niewiadomą:

$$a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2 \quad \text{lub} \quad 3a^2+5a+2=0$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- Przekształcenie równania $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ do postaci równania kwadratowego z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste)

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego $3a^2+5a+2=0$, nieodrzucenie rozwiązania $-\frac{2}{3}$ i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie czwórki liczb całkowitych spełniających warunki zadania: -1, 0, 1, 2.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe i było najłatwiejszym w tym zestawie egzaminacyjnym.
Rozwiązanie pełne przedstawiło 73% zdających, a tylko 19% nie pokonało zasadniczych trudności zadania, czyli nie potrafiło poprawnie zapisać równania kwadratowego opisującego warunki zadania. W rozwiązaniach pozostałych zdających pojawiały się błędy rachunkowe i logiczne, np. nieodrzucenie rozwiązania $-\frac{2}{3}$ i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^4 + x^2 \geq 2x$.

Sprawdzana umiejętność

Rozwiązanie nierówności wielomianowej (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,64	0,69	0,36

Przykładowy zapis rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:

$$x^4 + x^2 - 2x = x\left(x^3 + x - 2\right) = x\left(x\left(x^2 - 1\right) + 2\left(x - 1\right)\right) =$$

$$= x\left(x\left(x-1\right)\left(x+1\right) + 2\left(x-1\right)\right) = x\left(x-1\right)\left(x\left(x+1\right)+2\right) = x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 2\right).$$

Zauważamy, że trójmian $x^2 + x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej *x*, zatem rozwiązanie nierówności $x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 2\right) \geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right) \geq 0$, czyli sumą przedziałów $\left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie wielomianu $x^4 + x^2 - 2x$ w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest x lub $x-1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego , np. $x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 2\right) \geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

- Zauważenie, że rozwiązanie nierówności $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right) \geq 0$

albo

- narysowanie i uzupełnienie tabeli znaków lub sporządzenie szkicu wykresu wielomianu z uwzględnieniem jego miejsc zerowych.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności $x^4 + x^2 \geq 2x$: $\left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Ponad połowa zdających (54,9%) rozwiązała to zadanie bezbłędnie. Jednocześnie 22,7% maturzystów na poziomie rozszerzonym nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu. Co oznacza, że zdający nie potrafili zapisać wielomianu x^4+x^2-2x w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest x lub $x-1$ (mimo iż w każdym z dotychczasowych zestawów egzaminacyjnych, również na poziomie podstawowym, badana była umiejętność rozkładu wielomianu na czynniki). Pojawiały się także rozwiązania, w których zdający:

- dzielili obie strony nierówności przez x, bez odpowiedniego założenia,
- nie widzieli bądź nie umieli wykorzystać faktu, że trójmian x^2+x+2 przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x,
- popełniali błędy rachunkowe podczas rozwiązywania nierówności $x(x-1)(x^2+x+2)\geq 0$.

Sporadycznie zdający podejmowali próby rozwiązywania nierówności wielomianowej w oparciu o wykresy funkcji, jednak nikt nie przedstawił pełnego rozwiązania z wykorzystaniem tej metody.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***
Rozwiąż równanie $\cos 2x+2=3\cos x$.

Sprawdzana umiejętność
Rozwiązanie równania trygonometrycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,64	0,69	0,34

Przykładowy zapis rozwiązania
Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$, przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x:
$\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x+2=0$.

Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$, którego rozwiązaniami są $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$.

Zapisujemy rozwiązania tych równań:
$x=2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej argumentu x, np.:
$\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x+2=0$ lub $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt Rozwiązanie równania $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ z niewiadomą $\cos x$: $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$. **Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt** Rozwiązanie jednego z równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$. **Rozwiązanie pełne .... 4 pkt** Rozwiązanie równania: $x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Komentarz Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne. Zadania, które badają umiejętność rozwiązywania równania trygonometrycznego, pojawiają się w zestawie egzaminacyjnym z poziomu rozszerzonego corocznie. Efektem tego działania są coraz lepsze wyniki zdających. W tym roku prawie 39,1% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie i tylko 15,9% nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu. Zdający najczęściej przekształcali równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$ do postaci iloczynowej: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, a następnie rozwiązywali elementarne równania trygonometryczne: $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$. W wielu wypadkach trudność sprawiało zdającym rozwiązanie tych równań w zbiorze liczb rzeczywistych. Niektórzy zdający podawali poprawne rozwiązanie równania $\cos 2x + 2 = 3\cos x$, ale tylko w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4. ***(6 pkt)***

Oblicz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$.

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,42	0,46	0,18

Przykładowy zapis rozwiązania

Korzystamy ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m + 4$.

Mamy teraz:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= \left((m+2)^2 - 2(m+4)\right)^2 - 2(m+4)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$$

Stąd otrzymujemy równanie

$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$,

czyli $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$.

Zatem $\left(m^2 - 6\right)^2 = 64$, stąd : $m^2 - 6 = -8$ lub $m^2 - 6 = 8$,

czyli $m^2 = -2$ lub $m^2 = 14$.

Przypadek $m^2 = -2$ jest niemożliwy; zatem $m^2 = 14$, czyli $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Zauważamy, że jeśli $m^2 = 14$, to $\Delta = m^2 - 12 = 14 - 12 = 2 > 0$, a więc oba pierwiastki x_1 i x_2 są rzeczywiste.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

Zdający nie musi rozwiązywać nierówności $\Delta > 0$ o ile w dalszej części rozwiązania sprawdzi, że dla $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$ mamy $m^2 = 14$, więc $\Delta > 0$

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania z niewiadomą m i rozwiązaniu tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2$.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....3 pkt

Zapisanie wyrażenia $x_1^4 + x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m*, np.

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

Rozwiązanie bezbłędne części b) ....4 pkt

Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować strategię, która pozwoli zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. Tylko 18,5 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 26,1% zdających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.

Mimo iż ten rodzaj zadań pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, nie wszyscy zdający pamiętali o sprawdzeniu warunku, kiedy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania albo czy obliczone wartości parametru *m* spełniają ten warunek. Byli też maturzyści, którzy nie potrafili rozwiązać nierówności $\Delta > 0$, czyli równania $m^2 - 12 > 0$. Jednak najwięcej błędów zdający popełniali podczas zapisywania równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ w postaci równania ze zmienną *m*, np.:

- nie potrafili zastosować wzorów skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $x_1^4 + x_2^4$, np. $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2$ albo $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1 + x_2\right)^4$
- popełniali błędy podczas zapisywania wzorów Viète'a, np. $x_1 + x_2 = \frac{m+2}{2}$

  i $x_1 \cdot x_2 = \frac{m+4}{2}$

- popełniali błędy rachunkowe, zapisując wyrażenie $\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)^2-2\left(x_1x_2\right)^2$ z wykorzystaniem wzorów Viète'a.

Zaskakiwały błędy związane z wyznaczeniem części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego, np.: $m=\sqrt{14}$ lub $m=-\sqrt{14}$ i $m\in\left(-\infty,\,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$, czyli $m\in\varnothing$.

Zadanie 5. ***(6 pkt)***

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Sprawdzane umiejętności

Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,48	0,51	0,32

Przykładowy zapis rozwiązania

Oznaczmy przez a, b, c kolejne liczby tworzące (w podanej kolejności) ciąg geometryczny. Przez a oraz q oznaczamy odpowiednio pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu geometrycznego. Wówczas $b=aq$ oraz $c=aq^2$. Z treści zadania wiemy, że ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c$ jest arytmetyczny, co oznacza, że jest spełniona równość $2\left(b+8\right)=a+c$, czyli $2\left(aq+8\right)=a+aq^2$. Ponadto ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c+64$ jest geometryczny, więc $\left(b+8\right)^2=a\cdot\left(c+64\right)$, a stąd $\left(aq+8\right)^2=a\cdot\left(aq^2+64\right)$.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases}2\left(aq+8\right)=a+aq^2\\ \left(aq+8\right)^2=a\cdot\left(aq^2+64\right)\end{cases}$$

Przekształcamy ten układ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $q^2+2q-15=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $q_1=-5,\ q_2=3$.

Jeżeli $q=-5$, to $a=\frac{4}{9}$, $b=-\frac{20}{9}$ oraz $c=-\frac{20}{9}\cdot\left(-5\right)=\frac{100}{9}$.

Jeżeli zaś $q=3$, to $a=4$, $b=12$ oraz $c=12\cdot 3=36$.

Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $\left(4,\ 12,\ 36\right)$ oraz $\left(\frac{4}{9},-\frac{20}{9},\frac{100}{9}\right)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie, że liczby $a,\ aq,\ aq^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz liczby $a,\ aq+8,\ aq^2$ (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $a,\ aq+8,\ aq^2+64$ (w podanej kolejności) tworzą ciąg geometryczny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań, np.

$$\begin{cases} a + aq^2 = 2(aq+8) \\ (aq+8)^2 = a(aq^2+64) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą np.: $q^2 + 2q - 15 = 0$ lub $9a^2 - 40a + 16 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $q^2 + 2q - 15 = 0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne.

lub

- zdający przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $(4,\ 12,\ 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.
Tylko 21% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 9,1% zdających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu. Zadanie badało umiejętność zastosowania własności ciągów geometrycznego i arytmetycznego.
Sporadycznie pojawiały się rozwiązania, w których zdający nie potrafili zapisać równań wynikających z tych własności. Najtrudniejszym etapem rozwiązania tego zadania okazało się przekształcenie otrzymanego układu równań do postaci równania z jedną niewiadomą. Błędy rachunkowe i niepoprawne przekształcenia algebraiczne dominowały zwłaszcza przy przekształcaniu układu trzech równań $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b+8) = a + c \\ (b+8)^2 = a \cdot (c+64) \end{cases}$, opisujących własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego.

Zadanie 6. *(6 pkt)*

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P=\left(\frac{1}{2}m+\frac{5}{2},m\right)$, gdzie $m\in\langle -1,7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q=\left(\frac{55}{2},0\right)$.

<table>
<tr><td colspan="3">Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (standard III).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</td><td colspan="2">Wskaźnik łatwości zadania</td></tr>
<tr><td>LO</td><td>T</td></tr>
<tr><td>0,35</td><td>0,38</td><td>0,20</td></tr>
</table>

Przykładowy zapis rozwiązania

Wyznaczamy odległość punktów P i Q: $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{55}{2}-\frac{1}{2}m-\frac{5}{2}\right)^2+m^2}=\sqrt{\left(\frac{50}{2}-\frac{1}{2}m\right)^2+m^2}$.

Wyznaczamy wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$:

$f(m)=\left(\frac{50}{2}-\frac{1}{2}m\right)^2+m^2=\frac{5}{4}\left(m^2-20m+500\right)$ dla $m\in\langle -1,7\rangle$.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f:

$m_w=\left(\frac{5}{4}\cdot 20\right):\left(2\cdot\frac{5}{4}\right)=25:\frac{5}{2}=25\cdot\frac{2}{5}=10$

Ponieważ $10\notin\langle -1,7\rangle$, wiec w tym przedziale funkcja f jest monotoniczna.

Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji f dla $m\in\langle -1,7\rangle$ są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$f(-1)=\frac{5}{4}(1+20+500)=651,25$, $\quad f(7)=\frac{5}{4}(49-140+500)=511,25$.

Stąd najmniejsza i największa wartość $|PQ|^2$ to odpowiednio 511,25 oraz 651,25.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie odległości między punktami P i Q: $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{50}{2}-\frac{1}{2}m\right)^2+m^2}$ lub $|PQ|^2=\left(\frac{50}{2}-\frac{1}{2}m\right)^2+m^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie wzoru funkcji f w postaci, np. $f(m)=\frac{5}{4}\left(m^2-20m+500\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

- Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f i stwierdzenie, że współrzędna ta nie należy do przedziału $\langle -1,7\rangle$: $m_w=10$ i $10\notin\langle -1,7\rangle$ i z rozwiązania wynika, że $f(10)$ nie jest żadną z poszukiwanych wartości

albo

- obliczenie $f(-1)$ i $f(7)$, zapisanie bez uzasadnienia, że $f(-1)$ jest wartością największą, $f(7)$ jest wartością najmniejszą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Podanie najmniejszej i największej wartość $|PQ|^2$ odpowiednio 511,25 oraz 651,25 z uzasadnieniem, np. powołanie się na monotoniczność lub stwierdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do podanego przedziału.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Problemy optymalizacyjne z wykorzystaniem własności funkcji kwadratowej to stały element w zestawach egzaminacyjnych, mimo to aż 36,8% zdających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.

Z analizy rozwiązań zdających wynika, że nie wszyscy maturzyści rozwiązywali problem optymalizacyjny, niektóre rozwiązania ograniczały się bowiem tylko do obliczenia $|PQ|^2$, dla $P=(2,-1)$ oraz dla $P=(6,7)$. Wielu ze zdających, którzy wyznaczyli wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$ popełniało błędy, wyznaczając jej najmniejszą i największą wartość we wskazanym przedziale, np. zadający;

- badali własności funkcji $f(m)=m^2-20m+500$ i dla niej obliczali wartości ekstremalne,
- obliczali $f(-1)$ oraz $f(7)$ i zapisywali bez uzasadnienia, że $f(-1)$ jest wartością największą, $f(7)$ jest wartością najmniejszą,
- zapisywali, że $f(10)$ jest najmniejszą wartością $|PQ|^2$.

Tylko 14,1% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie i podało odpowiedź wraz z pełnym uzasadnieniem.

Zadanie 7. ***(3 pkt)***
Udowodnij, że jeżeli $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

Sprawdzana umiejętność
Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,28	0,31	0,14

Przykładowy zapis rozwiązania
Przekształcamy nierówność w sposób równoważny

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$$
$$\left(a^3-a^2b\right)+\left(b^3-ab^2\right) \geq 0$$
$$a^2(a-b)+b^2(b-a) \geq 0$$
$$(a-b)\left(a^2-b^2\right) \geq 0$$
$$(a-b)^2(a+b) \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia $a+b \geq 0$ oraz $(a-b)^2 \geq 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b, co kończy dowód.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej $(a-b)\left(a^2-b^2\right) \geq 0$ lub $(a-b)^2(a+b) \geq 0$, lub $(a-b)(a-b)(a+b) \geq 0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Przeprowadzenie pełnego dowodu.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających trudne.
Tylko 21,5% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 67,9% zdających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.
W pozostałej grupie (10,6%) znaleźli się maturzyści, którzy potrafili zapisać nierówność w postaci iloczynowej, ale nie uzasadnili, że $(a-b)\left(a^2-b^2\right) \geq 0$, dla liczb rzeczywistych a i b, spełniających warunek $a+b \geq 0$. Błędem rzadziej popełnianym niż w poprzednich latach było dowodzenie prawdziwości tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowanie na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb spełniających założenie.

Zadanie 8. *(4 pkt)*
Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,28	0,30	0,16

Przykładowy zapis rozwiązania
Rozkładamy liczbę 12 na czynniki pierwsze $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.
Mamy więc trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12:
1. Wśród cyfr tej liczby są „3”, „4” i sześć „1” ($12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Takich liczb jest: $8 \cdot 7 = 56$ - wybieramy miejsce dla „3” na 8 sposobów i z pozostałych dla „4” na 7 sposobów.
2. Wśród cyfr tej liczby są „2”, „6” i sześć „1” ($12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Takich liczb jest: $8 \cdot 7 = 56$ - wybieramy miejsce dla „2” na 8 sposobów i z pozostałych dla „6” na 7 sposobów.
3. Wśród cyfr tej liczby są dwie „2”, jedna „3” i pięć „1” ($12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Takich liczb jest: $8 \cdot \binom{7}{2} = 168$ - wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla „3” a następnie dwa miejsca z pozostałych siedmiu dla „2”.

Zatem liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12 jest $56 + 56 + 168 = 280$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):
$12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
$12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie wszystkich trzech, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości) :
$12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
$12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w co najmniej dwóch z trzech możliwości.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12: $56 + 56 + 168 = 280$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających trudne i było jednym z dwóch najtrudniejszych zdań w tym zestawie egzaminacyjnym.
Ponad połowa zdających (51,3%) nie podjęła próby rozwiązania tego zadania lub za jego

rozwiązanie uzyskała 0 punktów. Oznacza to, że nie potrafili oni dobrać odpowiedniej strategii rozwiązania tego problemu kombinatorycznego, czyli nie zauważyli, że mamy trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12.

Zdający, którzy dokonali w zadaniu istotnego postępu, najczęściej popełniali błędy podczas obliczania liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w przypadku występowania cyfr: 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1.

Tylko 8,8% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie.

Zadanie 9. ***(5 pkt)***

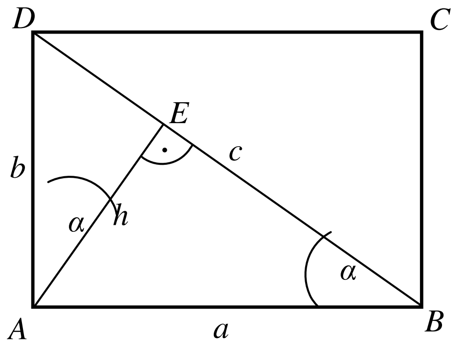
Dany jest prostokąt *ABCD*, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek *AE* jest wysokością trójkąta *DAB* opuszczoną na jego bok *BD*. Wyraź pole trójkąta *AED* za pomocą *a* i *b*.

Sprawdzane umiejętności

Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania LO	Wskaźnik łatwości zadania T
0,47	0,51	0,25

Przykładowy zapis rozwiązania



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta *DEA* (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *D*), więc $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Stąd $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pole trójkąta *AED* jest równe $P_{ADE} = \frac{1}{2} h \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- zauważenie, że trójkąty *AED* (lub *AEB*) i *BAD* są podobne i zapisanie odpowiedniej proporcji np.: $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ lub $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}$

albo

- zapisanie pola trójkąta AED: $P=\frac{|AE|\cdot|DE|}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka DE: $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub AE: $|AE|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie długości obu odcinków DE: $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i AE: $|AE|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trójkąta AED: $P_{AED}=\frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Mimo iż rozwiązanie zadania sprowadzało się do wykorzystania podobieństwa trójkątów (umiejętność z zakresu poziomu podstawowego), to tylko 29,5 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 32,1% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.

Maturzyści popełniali błędy już na etapie zapisywania zależności wynikającej z podobieństwa trójkątów AED i BAD, np. $\frac{|AD|}{|DE|}=\frac{|AB|}{|AD|}$. Pojawiały się także liczne błędy rachunkowe i niepoprawne przekształcenia algebraiczne, np. $|AE|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{a+b}$.

Warto zwrócić uwagę na rozwiązania zdających, w których wykorzystywano skalę podobieństwa. Maturzyści korzystali w nich z faktu, że trójkąt BEA jest podobny do trójkąta AED w skali $\frac{a}{b}$. Stąd $P_{BEA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot P_{AED}$. A ponieważ $P_{ABD}=\frac{1}{2}ab=P_{BEA}+P_{AED}$, więc $\frac{1}{2}ab=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot P_{AED}+P_{AED}$. Stąd $P_{AED}=\frac{\frac{1}{2}ab}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Zadanie 10. *(5 pkt)*
Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzana umiejętność
Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,74	0,76	0,63

Przykładowy zapis rozwiązania
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BAS,* obliczamy długość boku *AB*:
$|AB| = \sqrt{118^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 22$.
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CAS,* obliczamy długość boku *AC*:
$|AC| = \sqrt{131^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 61$.
Stąd wynika, że $|BC| = 61$, ponieważ nie istnieje trójkąt o długościach boków 22, 22, 61 (nierówność trójkąta).
Jeśli trójkąt ABC jest równoramienny, wówczas wysokość h opuszczona na bok AB jest równa:
$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60$.
Obliczamy pole P trójkąta ABC: $P = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 = 660$.
Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCS$: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot 660 \cdot 8\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie długości boku AB: $|AB| = 22$ albo obliczenie długości boku AC: $|AC| = 61$
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 pkt
Obliczenie długości boku AB: $|AB| = 22$ i długości boku AC: $|AC| = 61$ oraz zauważenie, że długość boku BC jest równa 61.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P = 660$.
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 1760\sqrt{210}$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających łatwe.
Większość maturzystów (59,5%) dokonała poprawnej analizy zadania i dobrała właściwą strategię jego rozwiązania. Tylko 10, 9% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, bądź za przedstawione rozwiązanie uzyskało 0 punktów.
Strategia rozwiązania tego zadania sprowadzała się do obliczenia pola podstawy ostrosłupa. W rozwiązaniach uczniowskich pojawiały się liczne błędy rachunkowe i logiczne, np. zdający liczyli pole nieistniejącego trójkąta o bokach 22, 22, 61.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Zdarzenia losowe *A*, *B* są zawarte w Ω oraz $P(A\cap B')=0{,}7$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).

Wykaż, że $P(A'\cap B)\le 0{,}3$.

Sprawdzana umiejętność

Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzeń (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,17	0,18	0,07

Przykładowy zapis rozwiązania

Zdarzenia $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$ są rozłączne.

Stąd i z faktu, że $P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)\le 1$ wynika, że

$1\ge P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)$, czyli $P(A'\cap B)\le 0{,}3$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający zauważy, że zdarzenia $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$ są rozłączne.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze, że $1\ge P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających bardzo trudne i było najtrudniejszym w całym zestawie egzaminacyjnym.

Tylko 10,7% ogółu maturzystów udowodniło postawioną w zadaniu tezę. Najczęściej były to rozwiązania, w których zdający korzystali z podstawowych własności prawdopodobieństwa i zapisywali, np. $(A\cap B')\subset B'$, stąd $P(A\cap B')\le P(B')$, czyli $P(A\cap B')\le 1-P(B)$, zatem $P(B)\le 0{,}3$. A dalej $(A'\cap B)\subset B$, stąd mamy $P(A'\cap B)\le P(B)$, czyli $P(A'\cap B)\le 0{,}3$, co kończy dowód.

W przeważającej większości (77,2%) zdający otrzymywali 0 punktów, co oznacza, że nie podjęli próby rozwiązania przedstawionego problemu lub nie uzyskali w zadaniu żadnego postępu. Pojawiały się rozwiązania, w których zdający korzystali z tezy do jej udowodnienia. Jednak dominowały błędy na etapie analizy warunków zadania. Niektórzy zdający zapisywali $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=1$, inni twierdzili, że $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A\cup B)$ albo $P(A\cap B')=1-P(B)$. Nie wszyscy maturzyści, którzy w rozwiązaniu zapisywali, że $1\ge P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)$, wyjaśniali, że wynika to z rozłączności zdarzeń $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$.

Wnioski wynikające z analizy jakościowej zadań

Rozwiązania zadań przedstawione przez zdających pokazują zróżnicowanie stopnia opanowania wiadomości i umiejętności matematycznych, które powinien posiadać absolwent szkoły ponadgimnazjalnej. Egzamin pokazał, że maturzyści dobrze opanowali podstawowe wiadomości i umiejętności z zakresu poziomu podstawowego i potrafili zastosować odpowiednie algorytmy w zadaniach, które pojawiały się już na egzaminach maturalnych. Nadal jednak problemem są zadania nieschematyczne, wymagające umiejętności modelowania, doboru strategii czy też przeprowadzenia rozumowania. Ponieważ kształcenie umiejętności rozumowania i argumentacji stanowi istotę matematyki, zadania tego typu będą w przyszłości stałym i coraz mocniej obecnym elementem arkuszy maturalnych. Dlatego w pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami, przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2013, warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.