Matematyka

Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusze egzaminacyjne z matematyki zostały opracowane na dwóch poziomach:

- podstawowym – *Arkusz I* (MMA-P1_1P-132)
- rozszerzonym – *Arkusz II* (MMA-R1_1P-132)

Arkusz I zawierał 34 zadania, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych (6 krótkiej odpowiedzi i 3 rozszerzonej odpowiedzi). Zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 170 minut.

Arkusz II zawierał 12 zadań otwartych, za których rozwiązanie zdający mógł uzyskać maksymalnie 50 punktów, egzamin trwał 180 minut.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu wymaganiach ogólnych. Badały one umiejętność interpretacji tekstu matematycznego oraz posługiwania się prostymi, dobrze znanymi pojęciami matematycznymi i algorytmami rozwiązywania zadań. Zróżnicowanie stopnia trudności zadań służyło sprawdzeniu, czy zdający potrafi dobrać model matematyczny do prostej sytuacji, oraz zbadaniu, czy w sytuacji problemowej odpowiednio dobiera strategię i weryfikuje trafność swojego wyboru. Dodatkowo dwa zadania sprawdzały umiejętność przeprowadzenia prostego rozumowania i argumentacji.

Opisane umiejętności zostały zbadane na bazie treści nauczania pogrupowanych w dziesięć działów podstawy programowej.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach wymagań ogólnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej zarówno dla poziomu podstawowego, jak i rozszerzonego.

Arkusz I – poziom podstawowy

Zadania zamknięte

Podobnie jak w poprzednich latach zadania zamknięte okazały się być dla zdających zdecydowanie łatwiejsze niż zadania otwarte. Średnia łatwość wszystkich zadań zamkniętych jest o 12 punktów procentowych wyższa od łatwości całego arkusza. Jest to zrozumiałe, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że jako zadania jednopunktowe obejmują konkretne zagadnienie z treści programowych, a ich rozwiązanie nie wymaga wykonania bardzo złożonych czynności. Zdający potrafią już także zastosować różne strategie rozwiązywania zadań zamkniętych: oprócz traktowania tych zadań jak otwartych i sprawdzania, która odpowiedź stanowi poprawny, uzyskany przez nich wynik, starają się weryfikować otrzymane rozwiązania, sprawdzają odrzucone odpowiedzi.

W tabeli przedstawiono łatwość poszczególnych umiejętności sprawdzanych przez zadania zamknięte.

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Interpretacja wskaźnika łatwości	Łatwość wg typów szkół				
			Zadanie:	LO	LP	LU	T	TU
1.	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględniej i jej interpretacji geometrycznej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\lvert x-a\rvert<b$	0,74	łatwe	0,80	0,60	0,41	0,66	0,44
2.	Zastosowanie pojęcia procentu	0,73	łatwe	0,79	0,52	0,48	0,66	0,45
3.	Wykonanie obliczeń z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym	0,70	łatwe	0,78	0,50	0,31	0,60	0,29
4.	Rozwiązanie układu równań liniowych	0,87	łatwe	0,91	0,72	0,56	0,82	0,56
5.	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej	0,64	umiarko-wanie trudne	0,74	0,41	0,22	0,50	0,20
6.	Odczytanie ze wzoru funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli	0,69	umiarko-wanie trudne	0,77	0,52	0,34	0,59	0,38
7.	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia	0,78	łatwe	0,84	0,63	0,48	0,72	0,41
8.	Badanie prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych	0,77	łatwe	0,83	0,66	0,49	0,72	0,53
9.	Wykorzystanie współczynników we wzorze funkcji liniowej do określenia położenia prostej w układzie współrzędnych	0,68	umiarko-wanie trudne	0,74	0,54	0,47	0,61	0,45
10.	Rozwiązanie nierówności liniowej i wskazanie najmniejszej liczby spełniającej tę nierówność	0,49	trudne	0,56	0,33	0,28	0,39	0,23
11.	Wykorzystanie wykresu funkcji $y=f(x)$ do wskazania wykresu funkcji typu $y=f(x+a)$, $y=f(x-a)$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$	0,52	umiarko-wanie trudne	0,59	0,37	0,21	0,43	0,20
12.	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego	0,71	łatwe	0,80	0,50	0,22	0,61	0,15
13.	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego	0,94	bardzo łatwe	0,95	0,86	0,72	0,93	0,79

14.	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	0,75	łatwe	0,83	0,53	0,30	0,66	0,24
15.	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i kątem środkowym	0,64	umiarko-wanie trudne	0,66	0,58	0,58	0,61	0,57
16.	Rozwiązanie równania wielomianowego	0,63	umiarko-wanie trudne	0,70	0,50	0,35	0,55	0,35
17.	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie i obwodu rombu	0,79	łatwe	0,84	0,60	0,49	0,73	0,45
18.	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka do wyznaczenia jednego z końców tego odcinka	0,79	łatwe	0,85	0,53	0,42	0,74	0,48
19.	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	0,49	trudne	0,58	0,30	0,22	0,39	0,20
20.	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanie	0,56	umiarko-wanie trudne	0,59	0,49	0,47	0,53	0,44
21.	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych	0,83	łatwe	0,88	0,64	0,39	0,78	0,42
22.	Stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń	0,61	umiarko-wanie trudne	0,69	0,38	0,27	0,52	0,22
23.	Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, w tym obliczeń na pierwiastkach	0,66	umiarko-wanie trudne	0,75	0,45	0,29	0,56	0,25
24.	Obliczanie mediany uporządkowanego zestawu danych	0,83	łatwe	0,88	0,66	0,44	0,79	0,35
25.	Wykorzystanie związków miarowych w graniastosłupie do obliczenia jego objętości	0,71	łatwe	0,76	0,62	0,57	0,64	0,56

Rozdział I – umiejętności łatwe

Wśród zadań zamkniętych najłatwiejsze dla zdających okazało się wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego. W zadaniu 13. na podstawie wartości trzeciego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego należało wskazać pierwszy wyraz tego ciągu. Trudno jednoznacznie odpowiedzieć, jaką metodą najczęściej zdający rozwiązywali to zadanie, ale z analizy zapisków w brudnopisach można wnioskować, że potrafią oni z podanych wartości obliczyć różnicę ciągu, a następnie wyznaczyć kolejno drugi i pierwszy wyraz ciągu.

Rozdział II – umiejętności umiarkowanie trudne

W przygotowaniach do matury warto zwracać uwagę uczniów na sposób tworzenia dystraktorów, czyli fałszywych odpowiedzi w zadaniach zamkniętych. Dobrym przykładem może być zadanie 6., które sprawdzało umiejętność odczytania współrzędnych wierzchołka paraboli danej wzorem zapisanym w postaci kanonicznej. Prawidłowe rozwiązanie tego zadania wymaga zatem wyłącznie starannego porównania danego wzoru funkcji z postacią kanoniczną podaną w zestawie wzorów maturalnych. Jedynymi możliwymi błędami, które mogą się pojawić na tym etapie, są źle odczytane znaki współrzędnych i te właśnie wszystkie możliwości zostały przewidziane w dystraktorach.

Doświadczenia poprzednich lat potwierdzają, że rachunek prawdopodobieństwa zazwyczaj sprawia zdającym trudności. Mimo wszystko tym razem możemy być zaskoczeni słabym opanowaniem umiejętności wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia, bo dotyczyło ono prostej sytuacji kombinatorycznej. Zadanie 22. odwoływało się do dwukrotnego rzutu kostką, czyli doświadczenia typowego, które jest analizowane w bardzo wielu różnorodnych przykładach we wszystkich podręcznikach i zbiorach zadań. W procesie nauczania należy zachęcać młodzież do pełnego zapisywania zbioru zdarzeń elementarnych oraz stosować różnorodne sposoby tego zapisu.

Rozdział III – umiejętności trudne

Dużą trudność sprawiła zdającym umiejętność rozwiązania nierówności liniowej. Jest to tym bardziej zaskakujące, że ten typ zadań pojawia się już na poziomie szkoły gimnazjalnej, a w szkole ponadgimnazjalnej umiejętność ta jest już tylko doskonalona. Podana nierówność w zadaniu 10. wymagała skupienia uwagi podczas stosowania metody przekształceń równoważnych z powodu koniecznej zmiany znaku i kierunku nierówności. Jest to moment, który często zostaje przeoczony przez uczniów, chociaż teoretycznie dobrze znają oni i potrafią zacytować stosowne twierdzenie. Dodatkowo zadanie wymagało podania najmniejszej liczby całkowitej spełniającej daną nierówność. Polecenie to często generuje błędy związane z uporządkowaniem liczb na osi liczbowej, szczególnie jeśli porównywanie dotyczy liczb ujemnych.

Zdający wykazali się również słabym opanowaniem umiejętności posługiwania się równaniem okręgu. W zadaniu 19. należało odczytać współrzędne środków dwóch okręgów danych równaniami w postaci kanonicznej i obliczyć ich odległość. Warto zwrócić uwagę, że rozwiązanie tego zadania całkowicie sprowadza się do wykorzystania wzorów podanych w zestawie wzorów maturalnych, przygotowanych przez CKE.

Zadania otwarte krótkiej i rozszerzonej odpowiedzi

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania (z uwzględnieniem kryteriów oceniania prac zdających ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki) zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE.

Ogólna analiza łatwości zadań otwartych pokazuje wyraźne, że zadania te są dla zdających zdecydowanie trudniejsze niż zamknięte. Wynikać to może z faktu, że zadania otwarte generalnie sprawdzają umiejętności w obszarze wyższych wymagań ogólnych oraz że do oceny rozwiązania tych zadań wymagane jest zapisanie toku rozumowania z zastosowaniem poprawnych symboli matematycznych. Dodatkową przeszkodą dla zdających są popełniane przez nich błędy nieuwagi lub błędy rachunkowe, które – zważywszy na złożoną z kilku czynności metodę rozwiązania zadania – często utrudniają, a nawet uniemożliwiają przedstawienie pełnego rozwiązania.

Rozdział I – umiejętności łatwe

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Interpretacja wskaźnika łatwości	Łatwość wg typów szkół				
			Zadanie:	LO	LP	LU	T	TU
30.	Rozwiązanie nierówności kwadratowej	0,72	łatwe	0,79	0,58	0,24	0,66	0,27

Najłatwiejszą umiejętnością w zestawie zadań otwartych okazało się być rozwiązanie nierówności kwadratowej w zadaniu 30. Chociaż zadanie to osiągnęło największą łatwość, to jednak wynik ten i tak nie jest zadowalający. Analizując rozwiązania uczniowskie tego zadania trudno oprzeć się wrażeniu, że zdający nie korzystają z arkuszy zamieszczanych na stronach okręgowych komisji i nie uczą się na błędach swoich starszych kolegów. Pomimo tego, że nierówność kwadratowa pojawiała się we wszystkich wcześniejszych arkuszach obowiązkowej matury z matematyki na poziomie podstawowym, uczniowie nadal popełniają w rozwiązaniu tego zadania te same błędy. Dlatego poniżej zamieszczamy analizę możliwych sposobów rozwiązania zadania 30. i zasady ich oceniania.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $2x^2-7x+5\geq 0$.

Przykładowy zapis rozwiązania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2-7x+5$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

  $\Delta=49-4\cdot 2\cdot 5=9$ i stąd $x_1=\dfrac{7-3}{4}=1$ oraz $x_2=\dfrac{7+3}{4}=\dfrac{5}{2}$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

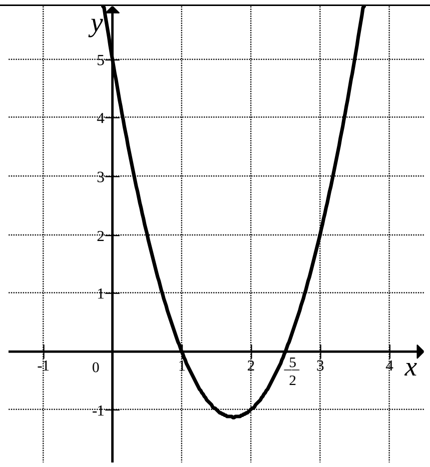
  $x_1\cdot x_2=\dfrac{5}{2}$ oraz $x_1+x_2=\dfrac{7}{2}$, stąd $x_1=1$ oraz $x_2=\dfrac{5}{2}$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając je na wykresie

  $x_1=1,\ x_2=2\dfrac{1}{2}$ lub $2(x-1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

Drugi etap rozwiązania:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub ($x \le 1$ lub $x \ge \frac{5}{2}$).

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $2\left(x - \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
  - zapisze nierówność $\left|x - \frac{7}{4}\right| \ge \frac{3}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x + \frac{7}{4}\right| \ge \frac{3}{4}$ i konsekwentnie do popełnionego

błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

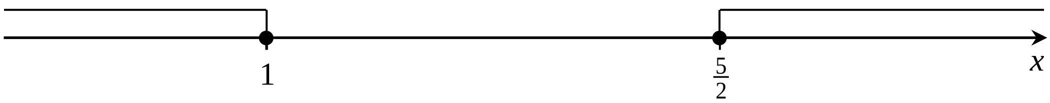
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,1\right\rangle\cup\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub $x\in\left(-\infty,1\right\rangle\cup\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub ($x\le 1$ lub $x\ge\frac{5}{2}$),

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x\le 1,\ x\ge\frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1=1,\ x_2=\frac{5}{2}$ i zapisze, np. $x\in\left(-\infty,-1\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{5},+\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

Nierówność kwadratowa sprawiła zdającym podobne trudności jak w poprzednich latach. Do najczęstszych błędów należy zakończenie rozwiązania na wyznaczeniu pierwiastków równania. Równie często w odpowiedzi maturzyści podają niewłaściwy przedział albo sumę przedziałów otwartych. Zdający nie ustrzegli się również wszelkich możliwych błędów w wyznaczeniu pierwiastków równania, podstawiając wartość Δ zamiast $\sqrt{\Delta}$, b zamiast $-b$, dzieląc licznik przez 2, a nie przez 2a, czyli np.: $x_1=\frac{7-9}{4}$ lub $x_1=\frac{-7-3}{4}$ lub $x_1=\frac{7-3}{2}$.

Rozdział II – umiejętności umiarkowanie trudne

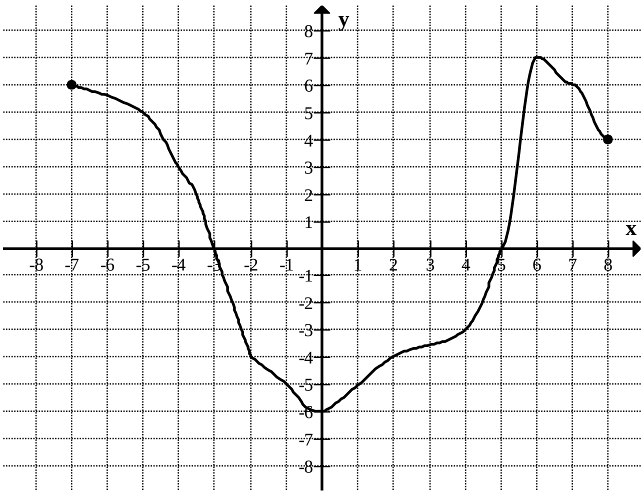
Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Łatwość wg typów szkół				
			LO	LP	LU	T	TU
26.	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki	0,66	0,75	0,49	0,14	0,56	0,16

27.	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	0,69	0,78	0,51	0,18	0,60	0,14
29.	Odczytywanie z wykresu funkcji zbioru jej wartości oraz przedziałów, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne	0,56	0,65	0,36	0,13	0,46	0,15
33.	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach	0,51	0,61	0,25	0,10	0,38	0,09

W grupie zadań umiarkowanie trudnych na uwagę zasługuje zadanie 29., które sprawdzało umiejętność odczytywania własności funkcji z jej wykresu. Zapewne w ocenie każdego nauczyciela zadanie to należy do kategorii bardzo łatwych. W szkole ponadgimnazjalnej umiejętności odczytywania z wykresu funkcji jej dziedziny, zbioru wartości, miejsc zerowych i znaku są doskonalone przy okazji poznawania kolejnych typów funkcji. Zastanawia zatem fakt, że zadanie to było poprawnie rozwiązane tylko w 56 procentach. Ten niższy od spodziewanego wynik łatwości wynika często z zastosowania mało precyzyjnego zapisu matematycznego. Dlatego poddajemy pod analizę sprawdzane umiejętności szczegółowe oraz typowe błędy uczniowskie.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f\left(x\right)$ określonej dla $x \in \langle -7,8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) największą wartość funkcji *f*,

b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Przykładowy zapis rozwiązania Odczytujemy z wykresu największą wartość funkcji *f* . Jest ona równa 7. Podajemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: $\left(-3,5\right)$.
Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- poda największą wartość funkcji: 7 i nie poda zbioru tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne

albo

- poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: $\left(-3,5\right)$ i nie poda największej wartości funkcji *f*.

  Uwaga

  Akceptujemy zapisy: $x\in\left(-3,5\right)$ lub $-3<x<5$ lub $x>-3$ i $x<5$ lub $x>-3$, $x<5$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poda największą wartość funkcji oraz poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: 7, $\left(-3,5\right)$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

W rozwiązaniu podpunktu b) akceptujemy zapisy: $x\in\left(5,-3\right)$, $x\in\left(3,5\right)$, $x\in\left(3,-5\right)$.

Komentarz

Uczniowie, odczytując największą wartość funkcji, często podawali współrzędne punktu $\left(6,7\right)$, co stanowi nieścisłą odpowiedź na zadane pytanie. Podobnie zapis: „funkcja przyjmuje największą wartość dla $x=6$”, chociaż nie zawiera fałszu, to nie jest pełną odpowiedzią i nie może być uznany za poprawny. Rozwiązania tego zadania niosły ze sobą informacje, że uczeń wie, czego dotyczy problem przedstawiony w zadaniu, jednak brak poprawności i precyzji w posługiwaniu się podstawowymi pojęciami związanymi z funkcją (jak np.: największa wartość funkcji to $x=7$) dyskredytował odpowiedzi. Podobnie w drugiej części zadania podanie przedziału domkniętego nie mogło być ocenione pozytywnie.

Rozdział III – umiejętności trudne

Tradycyjnie najtrudniejsze dla zdających okazały się zadania, które sprawdzały umiejętność przedstawienia rozumowania i argumentacji w celu udowodnienia podanego twierdzenia. Zadania 28. i 31. wpisują się również w wysoką frakcję opuszczeń. Fakt ten potwierdzają egzaminatorzy sprawdzający prace maturalne – również w ich praktyce szkolnej trudno im pokonać opór uczniów przed podejmowaniem prób przeprowadzania dowodu. Dlatego poniżej zamieszczamy przykładowe rozwiązania tych zadań, aby przekonać zdających, że nie są one aż tak trudne, jak im się wydaje, i polegają na zastosowaniu dobrze znanych im własności.

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Interpretacja wskaźnika łatwości	Łatwość wg typów szkół				
			Zadanie:	LO	LP	LU	T	TU
28.	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej	0,11	bardzo trudne	0,17	0,01	0,00	0,03	0,00
31.	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego	0,23	trudne	0,33	0,03	0,01	0,09	0,00
32.	Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich	0,39	trudne	0,49	0,16	0,04	0,25	0,05
34.	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego	0,35	trudne	0,45	0,12	0,01	0,21	0,02

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x+y+z=0$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx\le 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

Przykładowy zapis rozwiązania

Podnosimy obie strony równości $x+y+z=0$ do kwadratu i otrzymujemy równość równoważną

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0.$$

Stąd

$$xy+xz+yz=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Ponieważ suma kwadratów liczb x, y, z jest nieujemna, więc $-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 0$, czyli $xy+yz+zx\le 0$, co kończy dowód.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy podniesie obie strony równości $x+y+z=0$ do kwadratu i zapisze np.

$xy+xz+yz=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ lub $2xy+2xz+2yz=-x^2-y^2-z^2$

i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia

$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ lub $-x^2-y^2-z^2$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Komentarz
Pomimo wskazówki zawartej w treści zadania przeprowadzenie poprawnego i pełnego dowodu sprawiło zdającym trudność. Najczęściej popełniali oni błędy logiczne, traktując tezę jako dodatkowe założenie. Po przekształceniach nie otrzymywali oni nierówności tożsamościowej, tylko inną postać tezy. W wielu pracach można było odnaleźć próbę sprawdzenia tezy dla konkretnych wartości *x*, *y* i *z* spełniających warunek $x+y+z=0$, np.: $x=-5$, $y=2$ i $z=3$. Część zdających, po poprawnym wykorzystaniu wzoru na kwadrat sumy trzech wyrażeń, zapisywała badaną sumę w postaci $xy+xz+yz=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ i nie potrafiła uzasadnić jej znaku. Podobnie zdający, którzy z założenia wyznaczali jedną ze zmiennych, np.: $z=-x-y$ i podstawiali ją do sumy iloczynów. Po wykonaniu działań otrzymywali wyrażenie $xy+x(-x-y)+y(-x-y)=-x^2-y^2-xy$ i nie potrafili uzasadnić jego znaku.

Zadanie 31. ***(2 pkt)***
Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Przykładowy zapis rozwiązania
Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $6^{98}\cdot\left(6^2-2\cdot 6+10\right)$. Doprowadzamy do postaci $6^{98}\cdot 2\cdot 17$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje.. 1 pkt

gdy zapisze liczbę $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 6^k, gdzie $80\le k\le 98$, np. $6^{98}\left(6^2-2\cdot 6+10\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje.. 2 pkt

gdy zapisze liczbę w postaci, w której widać podzielność przez 17 albo przeprowadzi rozumowanie uzasadniające podzielność przez 17.

Komentarz
Generalnie zdający wykazali się znajomością metody dowodzenia podzielności liczb, dlatego starali się zapisać dane wyrażenie w postaci iloczynu. Uzyskanie tezy uniemożliwiło błędne wyłączenie potęgi liczby 6 oraz niewłaściwe zastosowanie twierdzeń dotyczących działań na potęgach. Z drugiej strony zdający stracili jeden punkt za brak pełnego uzasadnienia podzielności otrzymanego iloczynu przez 17. Oprócz tego w wielu pracach pojawiały się pewne nieścisłości w zapisie, które jednak nie przekreślały poprawności logicznej przedstawionego rozumowania. Najczęściej było to porównywanie różnych liczb, pomijanie czynników, które nie miały wpływu na podzielność, np.: $6^{98}\left(6^2-2\cdot 6+10\right)=36-12+10=34=17\cdot 2$.

Arkusz II

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteriach oceniania odpowiedzi,* opublikowanych na stronie internetowej CKE.

Arkusz maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym sprawdzał następujące umiejętności:

- Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną
- Przeprowadzenie dowodu geometrycznego
- Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych
- Rozwiązanie równania trygonometrycznego
- Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego
- Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków
- Wyznaczenie równania okręgu
- Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $y = f(x)$ i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu
- Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich
- Wyznaczanie związków miarowych w ostrosłupie
- Stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń
- Sporządzanie wykresu funkcji $y = |f(x)|$ na podstawie danego wykresu funkcji logarytmicznej $y = f(x)$; badanie liczby rozwiązań równania z parametrem

Rozdział I – umiejętności łatwe

Jak już wspomniano we wstępie, arkusz maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawiera zadania, które sprawdzają umiejętności nie tylko z zakresu rozszerzonego podstawy programowej. Takim wymaganiem jest wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego, które było sprawdzane zadaniem 5. Nie dziwi zatem fakt, że było ono łatwe dla zdających, choć można by oczekiwać łatwości wyższej niż uzyskana 0,77.

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Łatwość wg typów szkół				
			LO	LP	LU	T	TU
4.	Rozwiązanie równania trygonometrycznego	0,70	0,75	0,15	0,13	0,40	0,70
5.	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego	0,77	0,81	0,48	0,15	0,56	0,77

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

Ciąg liczbowy $(a,\ b,\ c)$ jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1,\ b+5,\ c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Przykładowy zapis rozwiązania

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

Podstawiamy do pierwszego równania, w miejsce $a+c$ wyrażenie $2b$ i otrzymujemy równanie $3b=33$, skąd $b=11$. Układ równań przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} b=11 \\ a+c=22 \\ 16^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

Równania drugie i trzecie tworzą układ z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy, podstawiając wyrażenie $22-a$ w miejsce niewiadomej c w równaniu trzecim. Otrzymujemy zatem równanie kwadratowe z niewiadomą a:

$$a^2-42a+297=0.$$

Zatem $a=33$ lub $a=9$.

Jeżeli $a=33$, to $c=-11$ i oczywiście $b=11$.

Otrzymujemy zatem ciąg arytmetyczny $(33,\ 11,\ -11)$, a po odpowiednich przekształceniach ciąg geometryczny $(32,\ 16,\ 8)$.

Jeżeli zaś $a=9$, to $c=13$ i $b=11$. Otrzymujemy teraz ciąg arytmetyczny $(9,\ 11,\ 13)$, a po wykonaniu odpowiednich przekształceń ciąg geometryczny $(8,\ 16,\ 32)$.

Szukanymi liczbami są zatem: $a=33$, $b=11$, $c=-11$ lub $a=9$, $b=11$, $c=13$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisze odpowiednie równanie, np. $2b=a+c$ albo $(b+5)^2=(a-1)(c+19)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający wykorzysta własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisze układ równań umożliwiający obliczenie liczb *a, b, c*, np.

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą *a* lub *c*, np.

$a^2-42a+297=0$ lub $c^2-2c-143=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający

- poprawne rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb

albo

- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane liczby: $a=33,\ b=11,\ c=-11$ lub $a=9,\ b=11,\ c=13$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający stosuje własności ciągu arytmetycznego przy rozważaniu ciągu geometrycznego (lub odwrotnie), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze odpowiedź w postaci, z której nie można jednoznacznie stwierdzić, że są dwie trójki szukanych liczb, np. zapisze: $a=33$ lub $a=9$, $b=11$, $c=-11$ lub $c=13$, to otrzymuje **4 punkty**.

Komentarz

Zdający bardzo rzadko opuszczali to zadanie, pewnie dlatego, że jego analiza była wręcz oczywista – zapisanie równań wynikających wprost z definicji dwóch ciągów lub z własności tych ciągów dla trzech kolejnych wyrazów. Dlatego bez większych problemów wykonywali oni istotny postęp, czyli zapisywali układ równań. Trudność sprawiało już doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą. Z powodu popełnionych błędów rachunkowych zdający otrzymywali często równania, które nie posiadały rozwiązań lub równania z takimi współczynnikami czy wartością wyróżnika, które zniechęcały ich do kontynuowania rozwiązania. Warto jeszcze wspomnieć o stosunkowo licznej grupie zdających, którzy pomimo uzyskania wszystkich poprawnych wyników w odpowiedzi podawali tylko jeden ciąg, odrzucając ujemną wartość wyrazu *c*. Wynika to zapewne z zapamiętanych schematów zadań podobnego typu, ale świadczy także o tym, jak istotne jest kształtowanie u uczniów nawyku powrotu, przed udzieleniem ostatecznej odpowiedzi, do analizy zadania i sprawdzenia wszystkich warunków.

Wysoką łatwość osiągnęła również umiejętność rozwiązywania równań trygonometrycznych. Na tę umiejętność w rozwiązaniu zadania 4. złożyło się kilka prostszych kroków: zastosowanie podstawowych tożsamości trygonometrycznych, zapisanie wyrażenia trygonometrycznego w postaci iloczynowej, a następnie rozwiązanie prostych równań trygonometrycznych w określonym przedziale.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Przykładowy zapis rozwiązania

Ponieważ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, więc równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ jest równoważne równaniu

$$2\cos^2 x + \cos x = 0,$$

czyli równaniu $\cos x(2\cos x + 1) = 0$. To równanie jest równoważne alternatywie równań

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ równanie $\cos x = 0$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$.

Równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$.

Zapisujemy odpowiedź: równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ma cztery rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej tego samego argumentu, np. $2\cos^2 x + \cos x = 0$ i na tym zakończy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający

- zapisze alternatywę $\cos x = 0$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$

albo

- wprowadzi pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$ i zapisze, że $t = 0$ lub $t = -\frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 3 pkt

Zdający

- rozwiąże równanie $\cos x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$

albo

- rozwiąże równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt Zdający zapisze rozwiązania obu równań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$. Uwagi 1. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t \in \langle -1,1 \rangle$, o ile z rozwiązania wynika, że zdający uwzględnia ten warunek. 2. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego: $\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, $\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **3 punkty**. 3. Jeżeli zdający dzieli stronami równanie $2\cos^2 x + \cos x = 0$ przez cos x bez rozpatrzenia dwóch przypadków i poprawnie rozwiąże równanie $2\cos x + 1 = 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **2 punkty**.
Komentarz Najbardziej typowe błędy w rozwiązaniach uczniowskich zostały właściwie przewidziane w uwagach w schemacie oceniania - podanie rozwiązań ogólnych równań trygonometrycznych bez uwzględnienia podanego przedziału. Również egzaminatorzy sprawdzający prace uczniowskie potwierdzili, że częstym błędem było dzielenie równania przez $\cos x$ bez rozpatrzenie dwóch przypadków i zapisania stosownych założeń. Dodatkowo zdający gorzej radzili sobie z rozwiązaniem równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ niż z ustaleniem miejsc zerowych funkcji cosinus. W przypadku tym pojawiały się rozwiązania odpowiadające funkcji sinus. Przeglądając rozwiązania można zaryzykować stwierdzenie, że w sytuacjach, kiedy uczniowie wykonywali pomocniczy wykres funkcji cosinus i zaznaczali obliczone wartości, popełnili zdecydowanie mniej pomyłek w odczytaniu argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 0 oraz $-\frac{1}{2}$ niż w sytuacji, gdy podawali je z pamięci.

Rozdział II – umiejętności umiarkowanie trudne

Umiarkowanie trudne okazały się dla zdających umiejętności rozwiązywania równań z wartością bezwzględną, rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem i zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian. Zadania, w których reprezentowane były te umiejętności, jako stosunkowo typowe, były najrzadziej opuszczane. Dowodzi to, że zdający znają ogólne schematy ich rozwiązań, jednak osiągnięcie kategorii rozwiązania pełnego było niemożliwe z powodu błędów w pominięciu jednego z warunków lub usterek rachunkowych.

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Łatwość wg typów szkół				
			LO	LP	LU	T	TU
1.	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną	0,63	0,68	0,30	0,00	0,33	0,63
6.	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków	0,58	0,64	0,17	0,00	0,27	0,58
7.	Wyznaczenie równania okręgu	0,58	0,61	0,50	0,06	0,40	0,58
8.	Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $y=f(x)$ i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu	0,69	0,75	0,25	0,00	0,36	0,69
12.	Sporządzanie wykresu funkcji $y=\lvert f(x)\rvert$ na podstawie danego wykresu funkcji logarytmicznej $y=f(x)$; badanie liczby rozwiązań równania z parametrem	0,67	0,71	0,33	0,00	0,39	0,67

Zadanie 1. (0–4)

Rozwiąż nierówność $|2x-5|-|x+4|\le 2-2x$.

Przykładowy zapis rozwiązania

I sposób rozwiązania (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: A. $(-\infty,-4)$, B. $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, C. $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

A. $x\in(-\infty,-4)$	B. $x\in\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$	C. $x\in\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$
$-2x+5+x+4\le 2-2x$ $x+9\le 2$ $x\le -7$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x\le -7$	$-2x+5-x-4\le 2-2x$ $-x+1\le 2$ $x\ge -1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1\le x<\frac{5}{2}$	$2x-5-x-4\le 2-2x$ $3x\le 11$ $x\le \frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $\frac{5}{2}\le x\le \frac{11}{3}$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $x\le -7$ lub $-1\le x\le \frac{11}{3}$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty,-7\right\rangle \cup \left\langle -1,\frac{11}{3}\right\rangle$.

II sposób rozwiązania (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

I. $\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$

W każdym z nich rozwiązujemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4\geq 0 \\ 2x-5-x-4\leq 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4< 0 \\ 2x-5+x+4\leq 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\geq 0 \\ -2x+5-x-4\leq 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \\ -2x+5+x+4\leq 2-2x \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq \frac{5}{2} \\ x\geq -4 \\ 3x\leq 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq \frac{5}{2} \\ x< -4 \\ 5x\leq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x< \frac{5}{2} \\ x\geq -4 \\ x\geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x< \frac{5}{2} \\ x< -4 \\ x\leq -7 \end{cases}$

niemożliwe $\quad -1\leq x<\frac{5}{2} \quad x\leq -7$

$\begin{cases} x\geq \frac{5}{2} \\ x\geq -4 \\ x\leq 3\frac{2}{3} \end{cases}$

$\frac{5}{2}\leq x\leq 3\frac{2}{3}$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $x\leq -7$ lub $-1\leq x\leq \frac{11}{3}$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały $\left(-\infty,-4\right)$, $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$

albo

- zapisze cztery przypadki:

I. $\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów.**
Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

- Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:
  A. dla $x\in\left(-\infty,-4\right)$ mamy $-2x+5+x+4\leq 2-2x$,

B. dla $x \in \left\langle -4, \frac{5}{2} \right)$ mamy $-2x+5-x-4 \leq 2-2x$,

C. dla $x \in \left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right)$ mamy $2x-5-x-4 \leq 2-2x$

albo

- zdający zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:
  I. gdy $2x-5 \geq 0$ i $x+4 \geq 0$, to wtedy $2x-5-x-4 \leq 2-2x$,
  II. gdy $2x-5 \geq 0$ i $x+4 < 0$, to wtedy $2x-5+x+4 \leq 2-2x$
  (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),
  III. gdy $2x-5 < 0$ i $x+4 \geq 0$, to wtedy $-2x+5-x-4 \leq 2-2x$,
  IV. gdy $2x-5 < 0$ i $x+4 < 0$, to wtedy $-2x+5+x+4 \leq 2-2x$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród A., B., C.), popełni błąd
  w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach (spośród I., III., IV.) , popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek II. jest niemożliwy, i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \left\langle -1, \frac{11}{3} \right\rangle$.

Uwaga:
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

Komentarz

Do pełnego rozwiązania zabrakło najczęściej zdającym staranności w przekształcaniu nierówności z wartością bezwzględną i to zarówno na poziomie stosowania definicji i własności wartości bezwzględnej jak i rozwiązywania nierówności liniowych. Pojawiły się również prace, w których zdający po rozwiązaniu nierówności w poszczególnych przedziałach zapisywali od razu ostateczną odpowiedź do zadania, pomijając w swoim rozumowaniu wyznaczanie części wspólnych otrzymanych rozwiązań cząstkowych z założeniami w poszczególnych przypadkach.

Zadanie 6. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2+2(1-m)x+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2$.

Przykładowy zapis rozwiązania

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$, czyli $\left[2(1-m)\right]^2-4\cdot 1\cdot\left(m^2-m\right)>0$,

$$4(m-1)^2-4m(m-1)>0,$$

$$-m+1>0,$$

$$m<1,$$

$$m\in(-\infty,1).$$

Nierówność $x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2$ zapisujemy w postaci równoważnej

$$x_1\cdot x_2\le 6m\le (x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Wykorzystując wzory Viete'a, otrzymujemy układ nierówności z niewiadomą *m*:

$$\frac{m^2-m}{1}\le 6m \quad \text{i} \quad 6m\le\left(\frac{2(m-1)}{1}\right)^2-2\cdot\frac{m^2-m}{1},$$

czyli

$$m^2-7m\le 0 \quad \text{i} \quad 6m\le 4\left(m^2-2m+1\right)-2m^2+2m,$$

$$m(m-7)\le 0 \quad \text{i} \quad m^2-6m+2\ge 0,$$

$$m\in\langle 0,7\rangle \text{ i } m\in\left(-\infty,3-\sqrt{7}\right\rangle\cup\left\langle 3+\sqrt{7},+\infty\right),$$

$$m\in\left\langle 0,3-\sqrt{7}\right\rangle\cup\left\langle 3+\sqrt{7},7\right\rangle.$$

Stąd i z poprzednio warunku otrzymujemy

$$m\in\left\langle 0,3-\sqrt{7}\right\rangle.$$

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in(-\infty,1)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta\ge 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za rozwiązanie nierówności $x_1 \cdot x_2 \le 6m$: $m \in \langle 0,7 \rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za rozwiązanie nierówności $6m \le x_1^2 + x_2^2$ zdający otrzymuje 3 punkty. Przy czym w tej części:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ w postaci $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$,

2 punkty zdający otrzymuje za zapisanie nierówności $6m \le x_1^2 + x_2^2$ w postaci nierówności z jedną niewiadomą, np.: $6m \le 4(m^2 - 2m + 1) - 2m^2 + 2m$,

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności $6m \le x_1^2 + x_2^2$:

$m \in \left(-\infty, 3 - \sqrt{7}\right\rangle \cup \left\langle 3 + \sqrt{7}, +\infty\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego.

Rozwiązanie pełne *(trzeci etap)* **...6 pkt**

Zdający wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i poda odpowiedź: $m \in \left\langle 0, 3 - \sqrt{7} \right\rangle$.

Uwaga
W przypadku rozwiązania z usterkami, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II.

Komentarz
Do najczęstszych błędów w tym zadaniu należało pominięcie warunku dotyczącego wyróżnika trójmianu kwadratowego. Problem mieli również zdający z zapisaniem sumy kwadratów pierwiastków za pomocą ich sumy i iloczynu oraz poprawnym doprowadzeniem do nierówności kwadratowej drugiej części danej nierówności podwójnej. Błędna ostateczna odpowiedź wynikała często ze złego oszacowania wartości wyrażeń niewymiernych.

Zadanie 8. (0–4)
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 20.
Oblicz wartość współczynnika *m* oraz pierwiastki tego wielomianu.

Przykładowy zapis rozwiązania
Reszta z dzielenia wielomianu *W* przez dwumian $x + 1$ jest równa $W(-1)$. Zatem

$$4(-1)^3 - 5(-1)^2 - 23(-1) + m = 20.$$

Stąd $m = 6$. Wielomian *W* ma zatem postać $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + 6$.

Zauważmy, że $W(3) = 4 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 23 \cdot 3 + 6 = 3 \cdot (36 - 15 - 23 + 2) = 0$.

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x - 3$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy

$$4x^3-5x^2-23x+6=(x-3)\left(4x^2+7x-2\right).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2+7x-2$:

$$\Delta=7^2-4\cdot4\cdot(-2)=81,\ \sqrt{\Delta}=9,$$

$$x_1=\frac{-7-9}{8}=-2,\ x_2=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

Uwaga

Możemy też zauważyć, że pierwiastkiem wielomianu *W* jest liczba –2, gdyż

$$W(-2)=4\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2-23\cdot(-2)+6=2\cdot(-16-10+23+3)=0.$$

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x+2$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3-5x^2-23x+6=(x+2)\left(4x^2-13x+3\right).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2-13x+3$:

$$\Delta=(-13)^2-4\cdot4\cdot3=169-48=121,\ \sqrt{\Delta}=11,$$

$$x_1=\frac{13-11}{8}=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{13+11}{8}=3.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

albo

Możemy zauważyć, że liczba $\frac{1}{4}$ jest pierwiastkiem wielomianu *W*, gdyż

$$W\left(\tfrac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^3-5\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2-23\cdot\tfrac{1}{4}+6=\tfrac{1}{16}-\tfrac{5}{16}-5\tfrac{3}{4}+6=0.$$

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x-\frac{1}{4}$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3-5x^2-23x+6=\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(4x^2-4x-24\right).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2-4x-24$:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot4\cdot(-24)=16+16\cdot24=16\cdot25,\ \sqrt{\Delta}=4\cdot5=20,$$

$$x_1=\frac{4-20}{8}=-2,\ x_2=\frac{4+20}{8}=3.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie z niewiadomą *m*, np. $4\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-23\cdot(-1)+m=20$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy wartość współczynnika *m*: $m=6$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający

- poda jeden z pierwiastków wielomianu, np.: 3, podzieli wielomian przez dwumian $(x-3)$ i otrzyma iloraz $4x^2+7x-2$ lub poda pierwiastek (-2), podzieli wielomian przez dwumian $(x+2)$ i otrzyma iloraz $4x^2-13x+3$,

albo

- zapisze wielomian W w postaci iloczynowej, np.: $W(x)=4(x+2)(x-3)(x-a)$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu W: $-2,\ \frac{1}{4},\ 3$.

Komentarz

Na różne sposoby zdający wyznaczali wartość parametru m, często wykonywali dzielenie, zamiast skorzystać z twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian. Natomiast w drugiej części zadania trudne okazało się wyznaczenie pierwiastka wymiernego. Młodzież po zastosowaniu twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych nie potrafiła wykorzystać uzyskanych pierwiastków do zapisania wielomianu w postaci iloczynowej.

Rozdział III – umiejętności trudne

W tegorocznym arkuszu z poziomu rozszerzonego najtrudniejsze dla zdających okazało się wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych. Umiejętność ta sprawdzana była w zadaniu 3. Poprawna analiza tego zadanie wymagała od zdającego wzięcia pod uwagę jednocześnie kilku elementów (warunków tworzenia liczby sześciocyfrowej), dopiero wtedy możny było uznać, że zostały pokonane zasadnicze trudności w tym zadaniu problemowym. Schemat oceniania był tak skonstruowany, że nie pozwalał przyznać punków za niepełne lub niecałkowicie poprawne rozumowanie prowadzące do pełnego rozwiązania.

Nr zad.	Badana umiejętność	Łatwość ogólna	Interpretacja wskaźnika łatwości	Łatwość wg typów szkół				
			Zadanie:	LO	LP	LU	T	TU
2.	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego	0,41	trudne	0,45	0,00	0,00	0,17	0,41
3.	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych	0,18	bardzo trudne	0,20	0,00	0,00	0,08	0,18
9.	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich	0,46	trudne	0,50	0,12	0,00	0,24	0,46
10.	Wyznaczanie związków miarowych w ostrosłupie	0,28	trudne	0,30	0,10	0,00	0,11	0,28
11.	Stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń	0,39	trudne	0,41	0,15	0,19	0,29	0,39

Zadanie 3. ***(3 pkt)***
Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Przykładowy zapis rozwiązania
Wybieramy z pięciu miejsc trzy miejsca, na których wstawiamy cyfrę 0, następnie wybieramy jedno z trzech miejsc dla cyfry 5, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

$$\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 30\cdot 64 = 1920.$$

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Wybranie trzech miejsc z pięciu dla cyfry 0, wybranie jednego z trzech miejsc dla cyfry 5 i rozmieszczenie na pozostałych dwóch miejscach cyfr różnych od 0 i od 5.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Obliczenie, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.

Komentarz
Najczęściej zdający nie potrafili uwzględnić warunku, że liczba sześciocyfrowa nie może zaczynać się od zera, stąd wynikały ich rozwiązania $\binom{6}{3}\cdot 3\cdot 8^2$. Podobnie uczniowie, którzy rozpoczynali swoje rozumowanie od ustalenia możliwości rozmieszczenia cyfry 5: $6\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2$ nie byli w stanie ustalić poprawnie, ile jest liczb sześciocyfrowych, spełniających podane warunki zadania. Ostatni element zadania – podanie liczby wariacji pozostałych dwóch cyfr – okazał się również dość trudny, ponieważ maturzyści stosowali tam błędnie wariacje bez powtórzeń lub kombinacje, np.: $8\cdot 7$, $\binom{8}{2}$. O skali problemów, jakie to zadanie sprawiło zdającym, mogą świadczyć odnotowane przez egzaminatorów całkowicie błędne rozumowania: $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 8\cdot 8$, $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 8\cdot 7$ lub $\binom{5}{3}+3+8^2$.

Potwierdzenie opisanych wyżej trudności zdających z rozwiązywaniem problemów z zakresu rachunku prawdopodobieństwa stanowi analiza rozwiązań zadania 11, którego łatwość wyniosła 0,39. W przypadku tego zadania egzaminatorzy zwrócili również uwagę na wysoką frakcję opuszczeń, w niektórych szkołach nawet w granicach 80%.

Zadanie 11. ***(4 pkt)***
Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Przykładowy zapis rozwiązania
Zdarzeniem elementarnym w tym doświadczeniu jest każdy ciąg czteroelementowy, którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Jest to model klasyczny. Wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest 6^4.
Zauważmy, że $60=1\cdot 2\cdot 5\cdot 6=1\cdot 3\cdot 4\cdot 5=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$. Oznacza to, że należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,2,5,6\}$. Jest ich $4!=24$.
2. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,3,4,5\}$. Jest ich $4!=24$.
3. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{2,3,5\}$ i których dwa wyrazy są dwójkami. Jest ich $4\cdot 3=12$.
4. Otrzymujemy zatem 60 ciągów. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest więc równe $\frac{60}{6^4}=\frac{5}{108}$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania
Zasadnicze trudności tego zadania polegają na zauważeniu trzech różnych sposobów otrzymania iloczynu równego 60 oraz zliczeniu, w każdym przypadku, liczby różnych czterowyrazowych ciągów. Za każdy rozpatrzony przypadek wraz z obliczoną poprawnie liczbę ciągów zdający otrzymuje **1 punkt**.

Czwarty punkt przyznamy zdającemu, który zapisze, że prawdopodobieństwo opisanego w treści zadania zdarzenia jest równe $\frac{|A|}{6^4}$, gdzie $|A|$ oznacza obliczoną przez zdającego liczbę ciągów.

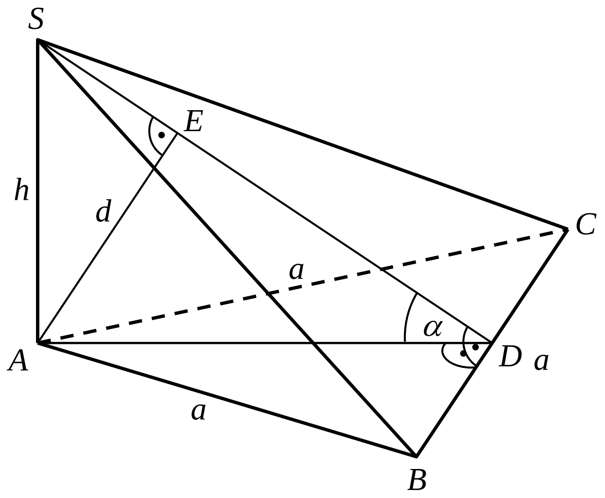
Komentarz
Zdający wymieniali właściwe zestawy liczb, których iloczyn jest równy 60, ale nie potrafili zliczyć zdarzeń elementarnych zbudowanych z tych liczb. Nierzadko pojawiała się liczba 3 jako liczba ciągów. Jednak zdecydowanie najczęstszym błędem było ustalenie $|A|=4!\cdot 3=24\cdot 3=72$, co oznaczało, że zdający nie zwrócili uwagi, że powtórzenie cyfry 2 zmniejsza liczbę permutacji.
W pracach pojawiły się również próby wypisania wszystkich zdarzeń sprzyjających, ale ponieważ nie były one wykonywane w sposób systematyczny, to błędem okazywało się pomijanie niektórych elementów lub dokonywanie ich powtórzeń.

Dla egzaminatorów i wszystkich nauczycieli matematyki nie jest pewnie zaskoczeniem słaby wynik zadania 10., które wymagało zastosowania związków miarowych w ostrosłupie. Podstawową przyczyną tego niezadawalającego wyniku jest zapewne brak danych liczbowych w tym zadaniu, co sprawia, że oprócz poprawności logicznej i merytorycznej zdający musi wykazać się dużą sprawnością w przekształcaniu, często niewymiernych wyrażeń algebraicznych, oraz dbałością o doprowadzanie kolejnych etapów rozumowania do najprostszej postaci.

Zadanie 10. ***(4 pkt)***

W ostrosłupie *ABCS* podstawa *ABC* jest trójkątem równobocznym o boku długości *a*. Krawędź *AS* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka *A* od ściany *BCS* jest równa *d*. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Przykładowy zapis rozwiązania



Zaznaczamy na rysunku odcinek AE, długość tego odcinka jest odległością wierzchołka *A* od ściany *BCS* i jednocześnie wysokością trójkąta prostokątnego *DAS*, gdzie *D* jest środkiem krawędzi *BC* danego ostrosłupa. Zatem $|AE| = d$.

Ponadto w trójkącie *DAS* wprowadzamy oznaczenia:

α – miara kąta *ADS* i $h = |AS|$ – wysokość ostrosłupa *ABCS*.

Z trójkątów prostokątnych *DAS* i AED, otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|AE|}{|AD|}$.

Ponieważ $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, to $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Przekształcamy równość $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ i wyznaczamy wysokość ostrosłupa *h*.

Otrzymujemy kolejno:

$$\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{2d}{a\sqrt{3}}$$

$$\frac{h^2}{4h^2+3a^2}=\frac{d^2}{3a^2}$$

$$h^2=\frac{3a^2d^2}{3a^2-4d^2}$$

czyli

$$h=\frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa *ABCS*:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}=\frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}.$$

Uwaga

Równość $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+\frac{3}{4}a^2}}=\dfrac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ możemy również otrzymać, korzystając z podobieństwa trójkątów *DAS* i *AED*.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zaznaczenie na rysunku odcinka o długości *d*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równości, z której można wyznaczyć *h* w zależności od *a* i *d*, np.:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{3}{4}a^2}}=\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie wysokości *h* ostrosłupa: $h=\dfrac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie objętości *V* ostrosłupa: $V=\dfrac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Komentarz

Błędy na poziomie analizy treści zadania należały raczej do rzadkości. Niewielki odsetek rozwiązań zawiera niepoprawnie zaznaczony odcinek *d*, czyli inaczej niż pod kątem prostym do ściany *BCS*. Podobnie jeśli chodzi o rozwiązania, w których zdający przyjmują pewne dodatkowe założenia dotyczące omawianej bryły. Egzaminatorzy odnotowali pojedyncze przypadki przyjęcia przez zdającego, że koniec odcinka *d* dzieli przeciwprostokątną na połowy lub w stosunku 1 : 2, kojarzonym z trójkątem równobocznym. Zdecydowanie gorzej maturzyści radzili sobie w dalszej części rozwiązania. Na podstawie przeprowadzonej analizy zadania byli w stanie zapisać szereg poprawnych zależności dotyczących trójkątów utworzonych w danym ostrosłupie. Trudność jednak sprawiło im połączenie właściwych równań w układ oznaczony. Pełne rozwiązanie tego zadania uniemożliwiły błędy rachunkowe i logiczne w przekształcaniu otrzymanych wyrażeń.

Wnioski wynikające z analizy jakościowej zadań

Rozwiązania zadań przedstawione przez zdających pokazują zróżnicowanie stopnia opanowania wiadomości i umiejętności matematycznych, które powinien posiadać absolwent szkoły ponadgimnazjalnej. Egzamin potwierdził, że maturzyści dobrze opanowali podstawowe wiadomości i umiejętności z zakresu poziomu podstawowego i potrafili zastosować odpowiednie algorytmy w zadaniach, które pojawiały się już na egzaminach maturalnych. Nadal jednak problemem są zadania nieschematyczne, wymagające umiejętności modelowania, doboru strategii czy też przeprowadzenia rozumowania. Ponieważ kształcenie umiejętności rozumowania i argumentacji stanowi istotę matematyki, zadania tego typu będą w przyszłości stałym i coraz mocniej obecnym elementem arkuszy maturalnych. Dlatego w pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Duże zróżnicowanie poziomu merytorycznego odpowiedzi uczniów ilustruje też fakt, że obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami, przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2014, warto nadal kształtować takie umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.