OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W JAWORZNIE

# Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2018

## Matematyka

Jaworzno, wrzesień 2018

**Opracowanie**
Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Izabela Szafrańska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu)
Mieczysław Fałat (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu)

**Redakcja**
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

**Opracowanie techniczne**
Joanna Dobkowska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

**Współpraca**
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

**Centralna Komisja Egzaminacyjna**
ul. Marka Edelmana 6, 00-190 Warszawa
tel. 022 536 65 00, fax 022 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie**
ul. Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99, 32 616 28 14
e-mail: oke@oke.jaworzno.pl
www.oke.jaworzno.pl

# Spis treści

# Poziom podstawowy

## 1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (pięć zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (dwanaście zadań zamkniętych, dwa zadania otwarte), **modelowanie matematyczne** (siedem zadań zamkniętych, dwa zadania otwarte), **użycie i tworzenie strategii** (jedno zadanie zamknięte, dwa zadania otwarte) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

## 2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym w województwie śląskim*

| **Liczba zdających** | | 27 521 |
|---|---|---|
| Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym | z liceów ogólnokształcących | 16 722 |
| | z techników | 10 799 |
| | ze szkół na wsi | 648 |
| | ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców | 1 094 |
| | ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców | 9 628 |
| | ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców | 16 151 |
| | ze szkół publicznych | 25 335 |
| | ze szkół niepublicznych | 2 186 |
| | kobiety | 14 707 |
| | mężczyźni | 12 814 |
| | bez dysleksji rozwojowej | 25 377 |
| | z dysleksją rozwojową | 2 144 |

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 4 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych w województwie śląskim

| | | |
|---|---|---|
| Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej | z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera | 74 |
| | słabowidzący | 49 |
| | niewidomi | 1 |
| | słabosłyszący | 70 |
| | niesłyszący | 13 |
| | **Ogółem** | 207 |

## 3. Przebieg egzaminu

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu w województwie śląskim

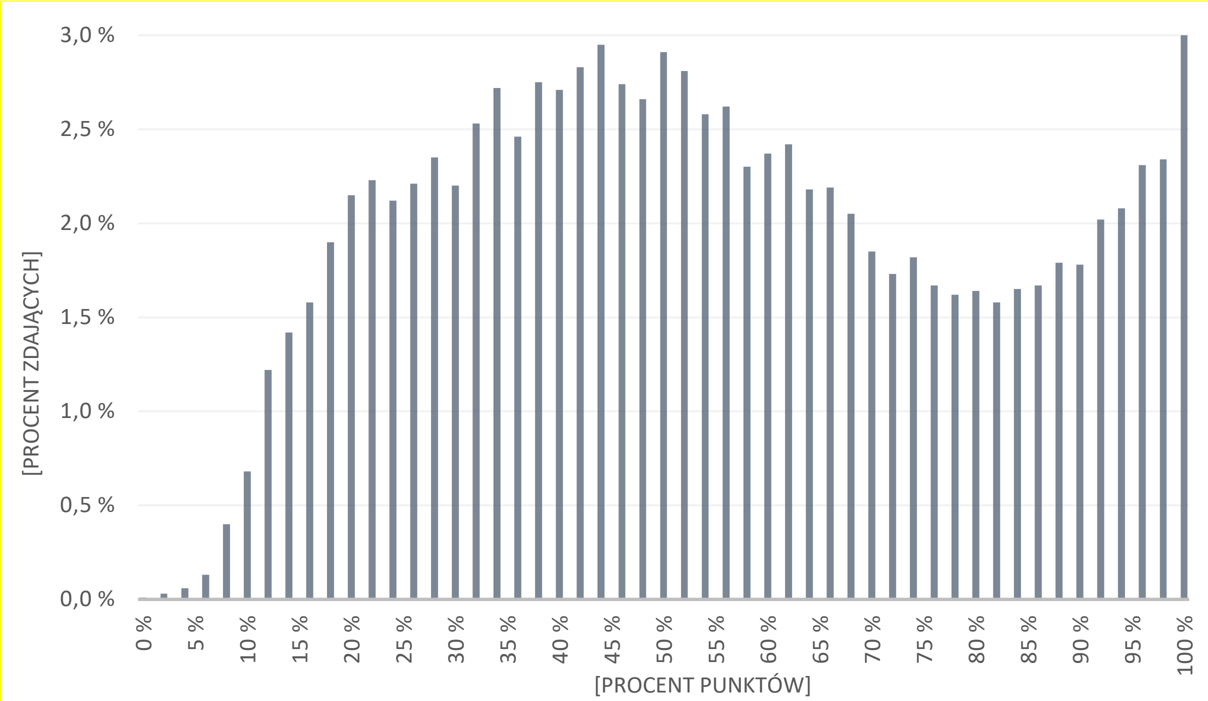
| | | | |
|---|---|---|---|
| Termin egzaminu | | | 7 maja 2018 |
| Czas trwania egzaminu | | | 170 minut |
| Liczba szkół | | | 570 |
| Liczba zespołów egzaminatorów | | | 35 |
| Liczba egzaminatorów | | | 764 |
| Liczba obserwatorów[1] (§ 8 ust. 1) | | | 77 |
| Liczba unieważnień[2] | w przypadku: | | |
| | art. 44zzv pkt 1 | stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego | 0 |
| | art. 44zzv pkt 2 | wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego | 1 |
| | art. 44zzv pkt 3 | zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu | 0 |
| | art. 44zzw ust. 1. | stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego | 0 |
| | art. 44zzy ust. 7 | stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego | 4 |
| | art. 44zzy ust. 10 | niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi) | 0 |
| Liczba wglądów[2] (art. 44zzz) | | | 353 |
| Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań | | | 0 |

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r., poz. 2223).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2018 r., poz. 1457, ze zm.).

# 4. Podstawowe dane statystyczne

### Wyniki zdających




Wykres 1. Rozkład wyników zdających w województwie śląskim

Tabela 4. Wyniki zdających w województwie śląskim – parametry statystyczne*

| Zdający | Liczba zdających | Minimum (%) | Maksimum (%) | Mediana (%) | Modalna (%) | Średnia (%) | Odchylenie standardowe (%) | Odsetek sukcesów** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ogółem** | 27521 | 0 | 100 | 52 | 100 | 55 | 25 | 82 |
| w tym: | | | | | | | | |
| z liceów ogólnokształcących | 16722 | 0 | 100 | 60 | 100 | 60 | 26 | 86 |
| z techników | 10799 | 0 | 100 | 44 | 34 | 47 | 23 | 76 |
| bez dysleksji rozwojowej | 25377 | 0 | 100 | 52 | 100 | 55 | 25 | 82 |
| z dysleksją rozwojową | 2144 | 6 | 100 | 56 | 50 | 58 | 24 | 86 |

* Parametry statystyczne podane zostały dla grup liczących 30 lub więcej zdających.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

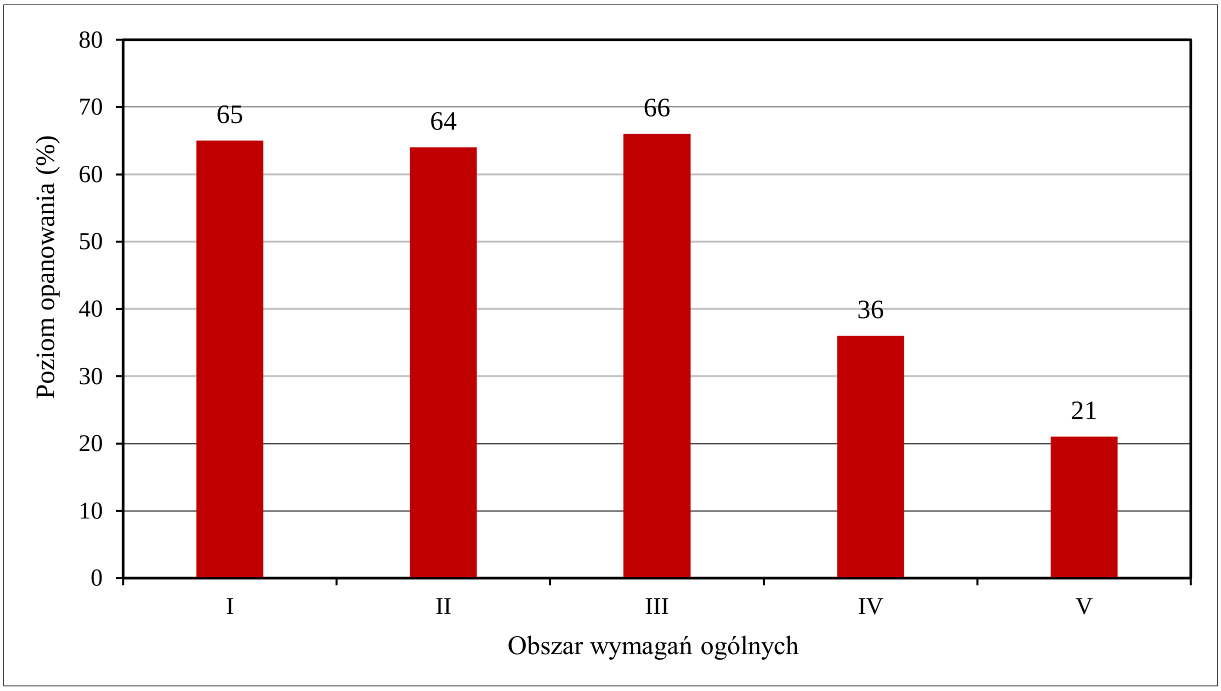
**Poziom wykonania zadań**

Tabela 5. Poziom wykonania zadań w kraju i województwie śląskim

| Numer zadania w arkuszu | Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe | Poziom wykonania zadania (%) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | kraj | woj. |
| 1. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6). | 73 | 71 |
| 2. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3). | 68 | 66 |
| 3. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4). | 73 | 72 |
| 4. | III. Modelowanie matematyczne. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9). | 87 | 88 |
| 5. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3). | 70 | 68 |
| 6. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje) (4.10). | 80 | 80 |
| 7. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.8). | 47 | 44 |
| 8. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7). | 77 | 77 |
| 9. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru (4.8). | 80 | 80 |
| 10. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6). | 66 | 64 |
| 11. | III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2). | 69 | 68 |
| 12. | III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). | 86 | 85 |
| 13. | III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4). | 63 | 62 |
| 14. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych – odczytanych z tablic (6.2). | 70 | 70 |

| Numer zadania w arkuszu | Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe | Poziom wykonania zadania (%) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | kraj | woj. |
| 15. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3). | 61 | 59 |
| 16. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1). | 78 | 78 |
| 17. | III. Modelowanie matematyczne. | 7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych (7.4). | 72 | 71 |
| 18. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.5). | 63 | 62 |
| 19. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2). | 82 | 82 |
| 20. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów (9.1). | 60 | 49 |
| 21. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów (9.2). | 66 | 64 |
| 22. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość walca, stożka, kuli (G11.2). | 60 | 58 |
| 23. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.1). | 33 | 31 |
| 24. | III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2). | 42 | 40 |
| 25. | III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). | 90 | 89 |
| 26. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5). | 73 | 73 |

| **Numer zadania w arkuszu** | **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** | **Poziom wykonania zadania (%)** | |
|---|---|---|---|---|
| | | | **kraj** | **woj.** |
| 27. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$ (3.7). | 62 | 59 |
| 28. | V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). | 21 | 19 |
| 29. | V. Rozumowanie i argumentacja. | 7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2). | 20 | 19 |
| 30. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw (4.14). Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (4.4).3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4). | 46 | 45 |
| 31. | III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). | 63 | 63 |
| 32. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (8.1). Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4). | 29 | 28 |
| 33. | III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). | 67 | 57 |
| 34. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego (G11.2). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4). | 34 | 34 |




Wykres 2. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych w kraju

# Poziom rozszerzony

## 1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wyboru wielokrotnego, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (jedno zadanie zamknięte), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (trzy zadania zamknięte i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), **modelowanie matematyczne** (jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i trzy zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

## 2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 6. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym w województwie śląskim*

| **Liczba zdających** | | 7234 |
|---|---|---|
| Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym | z liceów ogólnokształcących | 4342 |
| | z techników | 2892 |
| | ze szkół na wsi | 107 |
| | ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców | 215 |
| | ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców | 2588 |
| | ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców | 4324 |
| | ze szkół publicznych | 6995 |
| | ze szkół niepublicznych | 239 |
| | kobiety | 2551 |
| | mężczyźni | 4683 |

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 4 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 7. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych w województwie śląskim

| | | |
|---|---|---|
| Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej | z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera | 14 |
| | słabowidzący | 5 |
| | niewidomi | 0 |
| | słabosłyszący | 14 |
| | niesłyszący | 5 |
| | **Ogółem** | 38 |

# 3. Przebieg egzaminu

Tabela 8. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu w województwie śląskim

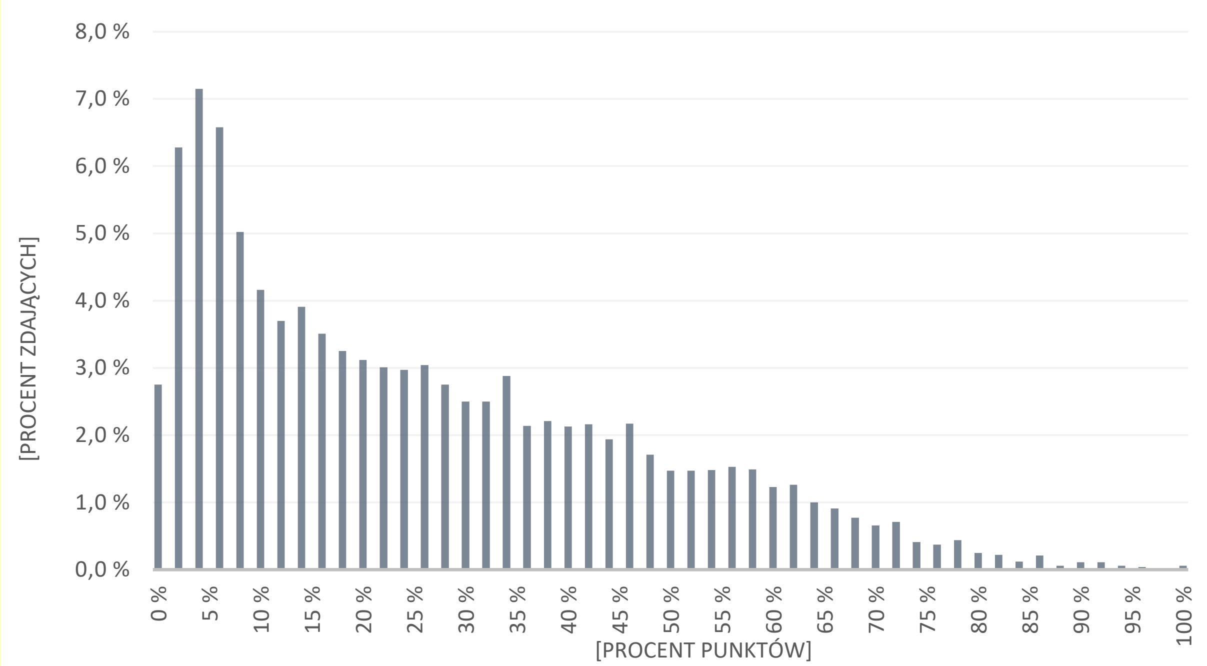
| | | | |
|---|---|---|---|
| Termin egzaminu | | | 9 maja 2018 |
| Czas trwania egzaminu | | | 180 minut |
| Liczba szkół | | | 396 |
| Liczba zespołów egzaminatorów | | | 35 |
| Liczba egzaminatorów | | | 764 |
| Liczba obserwatorów[2] (§ 8 ust. 1) | | | 22 |
| Liczba unieważnień[2] | w przypadku: | | |
| | art. 44zzv pkt 1 | stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego | 0 |
| | art. 44zzv pkt 2 | wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego | 1 |
| | art. 44zzv pkt 3 | zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu | 0 |
| | art. 44zzw ust. 1. | stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego | 0 |
| | art. 44zzy ust. 7 | stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego | 0 |
| | art. 44zzy ust. 10 | niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi) | 0 |
| Liczba wglądów[2] (art. 44zzz) | | | 67 |
| Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań | | | 1 |

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r., poz. 2223).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2018 r., poz. 1457, ze zm.).

# 4. Podstawowe dane statystyczne

## Wyniki zdających




Wykres 3. Rozkład wyników zdających w województwie śląskim

Tabela 9. Wyniki zdających w województwie śląskim – parametry statystyczne*

| Zdający | Liczba zdających | Minimum (%) | Maksimum (%) | Mediana (%) | Modalna (%) | Średnia (%) | Odchylenie standardowe (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ogółem** | 7272 | 0 | 100 | 22 | 4 | 26 | 21 |
| w tym: | | | | | | | |
| z liceów ogólnokształcących | 4362 | 0 | 100 | 32 | 34 | 35 | 21 |
| z techników | 2910 | 0 | 86 | 8 | 4 | 13 | 14 |

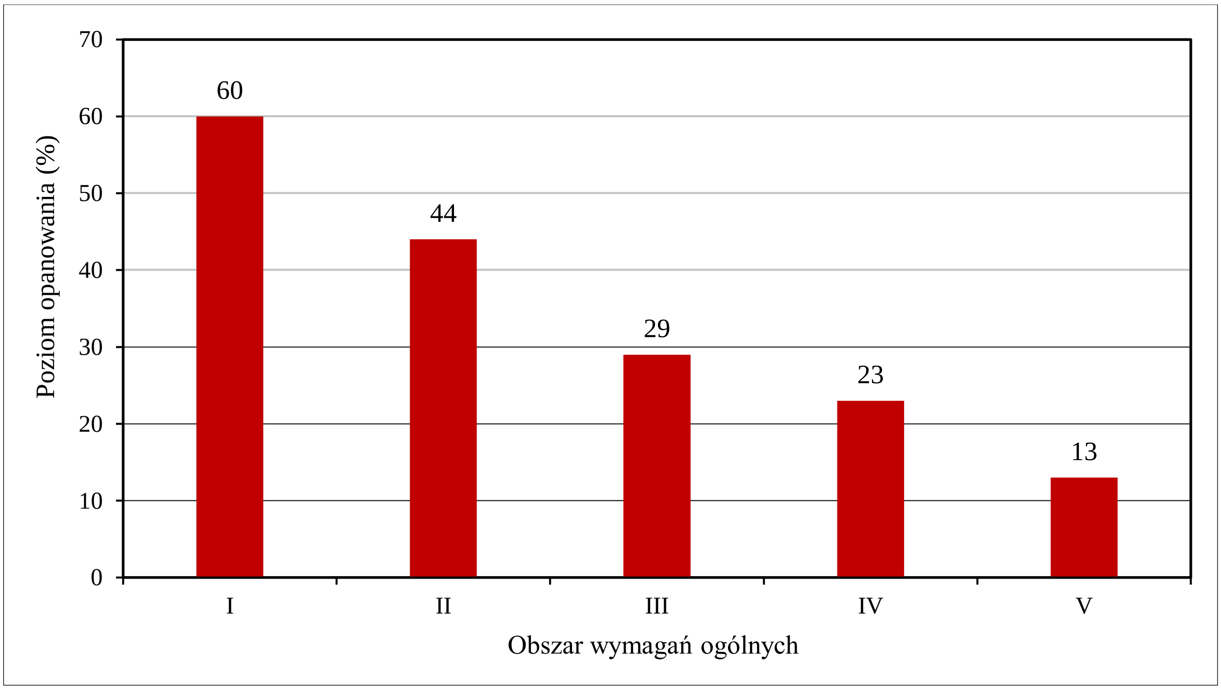
* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

## Poziom wykonania zadań

Tabela 10. Poziom wykonania zadań w kraju i województwie śląskim

| Numer zadania w arkuszu | Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe | Poziom wykonania zadania (%) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | kraj | woj. |
| 1. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4). | 72 | 70 |
| 2. | I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (R1.1).<br>ALBO<br>3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9). | 60 | 57 |
| 3. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2). | 76 | 73 |
| 4. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1 ). | 43 | 39 |
| 5. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1 ).<br>4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości) (4.2). | 18 | 16 |
| 6. | II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3 ). | 42 | 39 |
| 7. | V. Rozumowanie i argumentacja. | 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1). | 22 | 19 |
| 8. | V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (R2.3).<br>SP2. Działania na liczbach naturalnych. Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3 (SP2.3). | 4 | 3 |
| 9. | III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1). Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). | 23 | 21 |
| 10. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3). | 48 | 47 |

| **Numer zadania w arkuszu** | **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** | **Poziom wykonania zadania (%)** | |
|---|---|---|---|---|
| | | | **kraj** | **woj.** |
| | | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4). | | |
| 11. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (R6.5). Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6). | 21 | 18 |
| 12. | III. Modelowanie matematyczne. | 3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1). | 37 | 34 |
| 13. | III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4). | 51 | 48 |
| 14. | IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu oraz oblicza odległość punktu od prostej (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, R8.6, R8.4). | 7 | 6 |
| 15. | III. Modelowanie matematyczne. | 7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).<br>11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6). | 14 | 11 |




Wykres 4. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych w kraju

# Komentarz do wyników krajowych

## 1. Analiza jakościowa zadań

NAJLEPIEJ OPANOWANE UMIEJĘTNOŚCI

**Poziom podstawowy egzaminu**

Poziom wykonania zadań z matury na poziomie podstawowym zawarty w Tabeli 5. na stronach 6.–8. pozwala stwierdzić, że maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:

- stosowania w typowej sytuacji klasycznej definicji prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń;
- wykonywania obliczeń procentowych;
- stosowania wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego;
- badania równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- badania własności funkcji kwadratowych.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu (poziom wykonania – 90%) okazało się zadanie 25., badające umiejętność obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa w nieskomplikowanej sytuacji.

Zdający w zdecydowanej większości nie mieli problemu z ustaleniem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych w doświadczeniu, jak i z wyznaczeniem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu rezultatowi.

Niewiele niższy wynik maturzyści osiągnęli w zadaniu 4. (poziom wykonania – 87%), w którym należało obliczyć cenę roweru przed obniżką przy wskazanej procentowej wielkości tej obniżki oraz cenie po obniżce.

Zastosowanie obliczeń procentowych na poziomie elementarnym nie sprawiło trudności dużej części absolwentów szkół kończących się maturą.

Podobnie wysoki poziom wykonania zadania (86%) odnotowano w zadaniu 12., w którym maturzyści obliczali piąty wyraz ciągu arytmetycznego, gdy podano sumę czwartego, piątego i szóstego wyrazu tego ciągu.

Większość zdających poprawnie stosowała wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub podstawową własność ciągu arytmetycznego, która zresztą jest ukryta w nazwie ciągu (dla każdych trzech wyrazów ciągu arytmetycznego wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną obu sąsiednich wyrazów).

Z kolei zadanie 19. badało umiejętność dobrania wartości współczynnika $m$, występującego w równaniach dwóch prostych, tak aby dwie proste określone równaniami kierunkowymi były prostymi równoległymi. Należało w tym celu rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą. 82% maturzystów rozwiązało to zadanie bezbłędnie, wykazując się znajomością warunku równoległości prostych.

Nietrudno zauważyć, że maturzyści na poziomie podstawowym najlepiej opanowali umiejętności stosowania pojęć oraz stosowania elementarnych własności tych pojęć w sytuacjach typowych. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania, które zostały bezbłędnie rozwiązane przez 80% i więcej zdających, są zadaniami jedno lub dwuczynnościowymi. Zadania te nie mają szerszego kontekstu, ich rozwiązanie nie wymaga wykonania dodatkowych czynności, i – co może najważniejsze – umiejętności sprawdzane tymi zadaniami zostały precyzyjnie opisane i dotyczyły typowych sytuacji. Do rozwiązania zadań wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne i najważniejsze własności rozważanych obiektów, zrozumieć nieskomplikowany tekst matematyczny, zastosować właściwy algorytm i wykonać elementarne rachunki.

## Poziom rozszerzony egzaminu

Spośród zadań występujących w zestawie egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym dla tegorocznych maturzystów najłatwiejszymi były te, przy rozwiązywaniu których należało wykorzystać popularne wzory lub zastosować konkretne twierdzenia w typowych kontekstach.

Najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte, np. zadanie 3. (poziom wykonania zadania 76%). Zadanie to wymagało zastosowania wzoru na logarytm potęgi oraz na zamianę podstawy logarytmu. Korzystanie z własności logarytmów nie przysparza trudności zdecydowanej większości zdających.

Z kolei zadanie 1., przy rozwiązaniu którego należało wykazać się umiejętnościami wykorzystania praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych rozwiązało 72% zdających.

Rezultaty osiągnięte przez zdających w dwóch powyższych zadaniach wskazują na to, że większość zdających opanowała umiejętności wykonywania obliczeń na potęgach o wykładnikach wymiernych oraz wykorzystania praw działań na logarytmach w zakresie określonym w podstawie programowej.

### UMIEJĘTNOŚCI SPRAWIAJĄCE NAJWIĘKSZE TRUDNOŚCI

Kolejny raz na **poziomie podstawowym** dało się zaobserwować, że największe trudności sprawiają maturzystom rozwiązania zadań polegających na udowodnieniu twierdzenia. W maju 2018 roku trudne dla maturzystów okazały się zadania 28. i 29.

W zadaniu 28. zdający osiągnęli poziom wykonania 21%, w zadaniu 29. zaś – 20%. Do niskich wyników przyczyniły się w sposób bardzo istotny opuszczenia obu zadań. Część maturzystów na polecenie „wykaż, że” zareagowała niepodjęciem jakiejkolwiek próby zapisu rozwiązania. Oba te zadania były dla zdających trudne, ponieważ wymagały przeprowadzenia i zapisania rozumowania.

Należy podkreślić, że na poziomie podstawowym niskim poziomem wykonania (29%) charakteryzuje się także zadanie 32., w którym maturzyści mieli okazję zaprezentować umiejętność zastosowania strategii wynikającej wprost z treści zadania.

W odróżnieniu jednak od dwóch zadań na dowodzenie, to nie opuszczenia zadania stanowiły ważną przyczynę niskiego wyniku. W tym przypadku rozwiązania maturzystów ujawniały brak całościowej koncepcji rozwiązania zadania lub też błędy w interpretacji treści tego zadania.

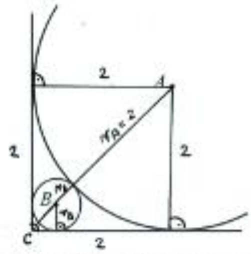
Przeanalizujmy zatem błędy, jakie wystąpiły w trzech najtrudniejszych zadaniach z tegorocznego egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym. Najtrudniejsze z nich to zadanie 29., które wymagało od maturzysty uzasadnienia nierówności dla promienia okręgu stycznego do ramion kąta prostego oraz stycznego zewnętrznie do drugiego okręgu.

Aby uzasadnić, że promień mniejszego z rozważanych okręgów (o środku w punkcie $B$) jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$, można było obliczyć długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego z punktem styczności obu okręgów, a następnie zauważyć, że średnica okręgu o środku $B$ jest krótsza od tego odcinka.

Inny sposób polegał na ułożeniu równania z jedną niewiadomą, którą był promień okręgu o środku w punkcie $B$, rozwiązaniu tego równania i uzasadnieniu, że obliczony promień spełnia podaną nierówność.

Poniżej zamieszczamy dwa poprawne rozwiązania tego zadania, wykorzystujące oba omówione sposoby (przykład 1. i przykład 2.).

Przykład 1.




Uzasadnij, że promień okręgu o środku $B$ jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

Teza: $r_B < \sqrt{2}-1$

Dowód:

$|AC| = 2\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 2)

$|AC| > r_A + 2r_B$ (z założeń)

$2\sqrt{2} > 2 + 2r_B \quad /:2$

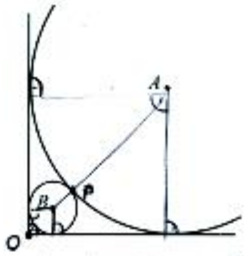
$\sqrt{2} > 1 + r_B$

$r_B < \sqrt{2}-1$

Przykład 2.

założenie:

$|AP| = 2$

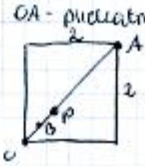



Uzasadnij, że promień okręgu o środku $B$ jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

teza: $|BP| < \sqrt{2}-1 \rightarrow |BP| - \sqrt{2} + 1 < 0$

dowód:

OA – przekątna kwadratu o boku 2 (promień dużego okręgu)



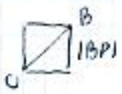

$|OA| = 2\sqrt{2}$

$|OA| = |OB| + |BP| + |PA|$

$|BP| = |OA| - |OB| - |PA|$

$|BP| = 2\sqrt{2} - 2 - |OB|$

$|OB|$ – przekątna kwadratu o promieniu $|BP|$




$|BP| \cdot \sqrt{2} = |OB|$

$|BP| = 2\sqrt{2} - 2 - |BP|\sqrt{2} \quad / + |BP|\sqrt{2}$

$|BP| + \sqrt{2}\,|BP| = 2\sqrt{2} - 2$

$|BP| \cdot (1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2 \quad / : (1+\sqrt{2}) \qquad (1+\sqrt{2} \neq 0)$

$|BP| = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 2(2+1-2\sqrt{2}) = 2(3-2\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2}$

$|BP| - \sqrt{2} + 1 = 6 - 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 7 - 5\sqrt{2} \approx -$ ~~...~~ $0{,}0711 < 0$ cnd

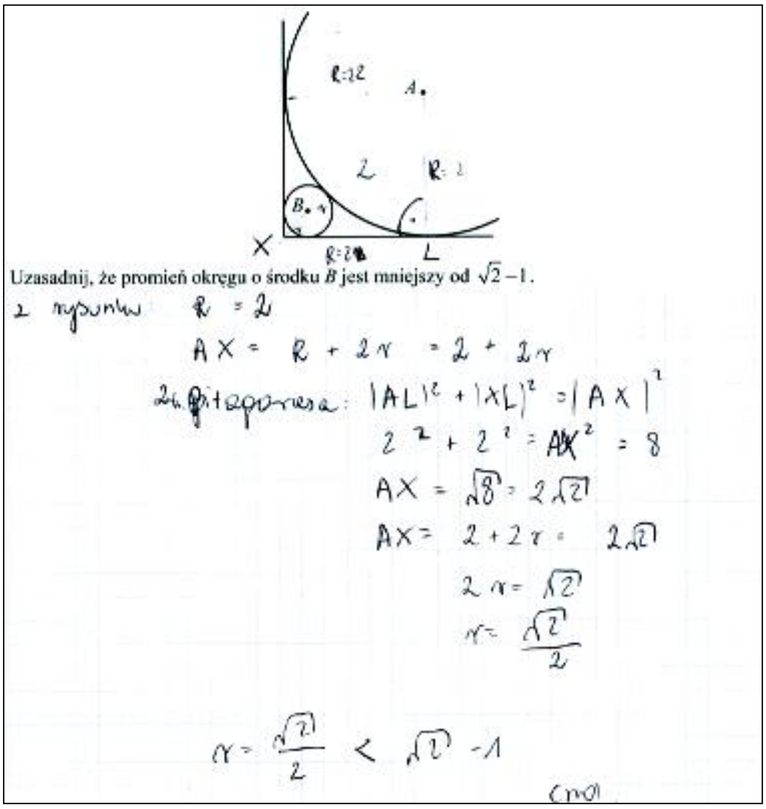
$(7 < 5\sqrt{2})$

Nr zadania 28 29

Wielu maturzystów nie podjęło nawet próby rozwiązania tego zadania. Część zdających, którzy podjęli rozwiązanie, popełniła błąd polegający na przyjęciu założenia, że odcinek łączący wierzchołek kąta prostego z punktem styczności obu okręgów jest średnicą mniejszego okręgu.

Poniżej przedstawiamy przykład takiego niepoprawnego rozwiązania, w którym zdający, oprócz wspomnianego błędu z przyjęciem niewłaściwej długości odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego z punktem styczności obu okręgów, popełnił jeszcze błąd rachunkowy przy odejmowaniu liczby wymiernej od niewymiernej (przykład 3.).

Przykład 3.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku $B$ jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

z rysunku $R = 2$

$AX = R + 2r = 2 + 2r$

z tw. pitagorasa: $|AL|^2 + |XL|^2 = |AX|^2$

$2^2 + 2^2 = AX^2 = 8$

$AX = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AX = 2 + 2r = 2\sqrt{2}$

$2r = \sqrt{2}$

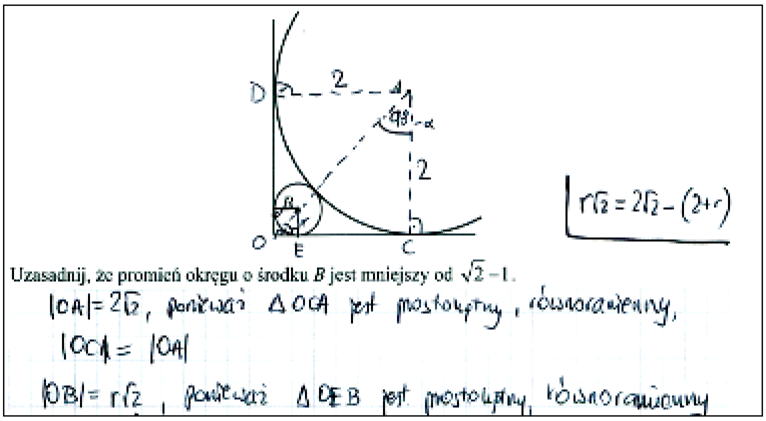
$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2} - 1$

(no)

Część zdających przyjęła niepoprawną metodę uzasadnienia, która zawiera bezrefleksyjne stosowanie przybliżeń dziesiętnych i w efekcie nie pozwala na poprawne rozumowanie. Z taką sytuacją mamy do czynienia w przykładzie 4.

Przykład 4.

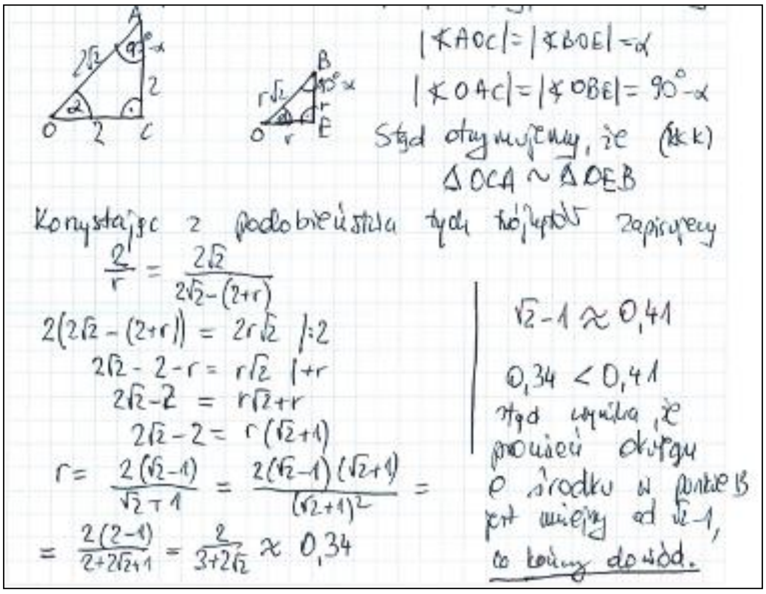


Uzasadnij, że promień okręgu o środku $B$ jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

$|OA| = 2\sqrt{2}$, ponieważ $\Delta OCA$ jest prostokątny, równoramienny,

$|OC| = |OA|$

$|OB| = r\sqrt{2}$, ponieważ $\Delta OEB$ jest prostokątny, równoramienny




Zdający zapisał i rozwiązał poprawnie równanie z jedną niewiadomą i otrzymał promień mniejszego okręgu

$$r = \frac{2}{3+2\sqrt{2}}.$$

Następnie przybliżył z niedomiarem zarówno liczbę $\sqrt{2}-1$, zapisując, że $\sqrt{2}-1 \approx 0,41$, jak również liczbę $\frac{2}{3+2\sqrt{2}}$, zapisując, że $\frac{2}{3+2\sqrt{2}} \approx 0,34$. Jasne jest, że pierwsze z tych przybliżeń pozwala wnioskować o prawdziwości nierówności. Natomiast wybranie drugiego z tych przybliżeń prowadzi do nierówności

$$0,34 < \frac{2}{3+2\sqrt{2}} < 0,41 < \sqrt{2}-1$$

Ta nierówność nie dostarcza argumentu do uzasadnienia tezy.
Zdający powinien przyjąć inną taktykę przy stosowaniu przybliżeń. Po pierwsze, należało wziąć przybliżenie liczby $\frac{2}{3+2\sqrt{2}}$ z nadmiarem, na przykład $0,35$. Wtedy nierówność przyjęłaby postać

$$\frac{2}{3+2\sqrt{2}} < 0,35 < 0,41 < \sqrt{2}-1,$$

a z takiej nierówności teza twierdzenia byłaby oczywistym wnioskiem.
Po drugie, zdający mógł rozwiązać nieco inaczej równanie

$$2\sqrt{2}-2 = r\left(\sqrt{2}+1\right)$$

i w ten sposób mógł uniknąć kłopotów związanych z przybliżeniami. Wystarczyło tylko pomnożyć obie strony tego równania przez dodatnią liczbę $\sqrt{2}-1$.
Otrzymujemy wtedy równanie

$$2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = r \text{, czyli równanie } 2\left(3-2\sqrt{2}\right) = r.$$

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać wówczas, że

$$6-4\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \text{, czyli, że } 7 < 5\sqrt{2}.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż jest równoważna oczywistej nierówności $49 < 50$.

Chcemy zaznaczyć, że w schemacie oceniania rozwiązań tego zadania, opublikowanym na witrynie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, zamieszczono II sposób rozwiązania tego zadania (strony 10. i 11. zasad oceniania) oraz uwagę nr 1 do tego schematu punktowania zadania, które powinny

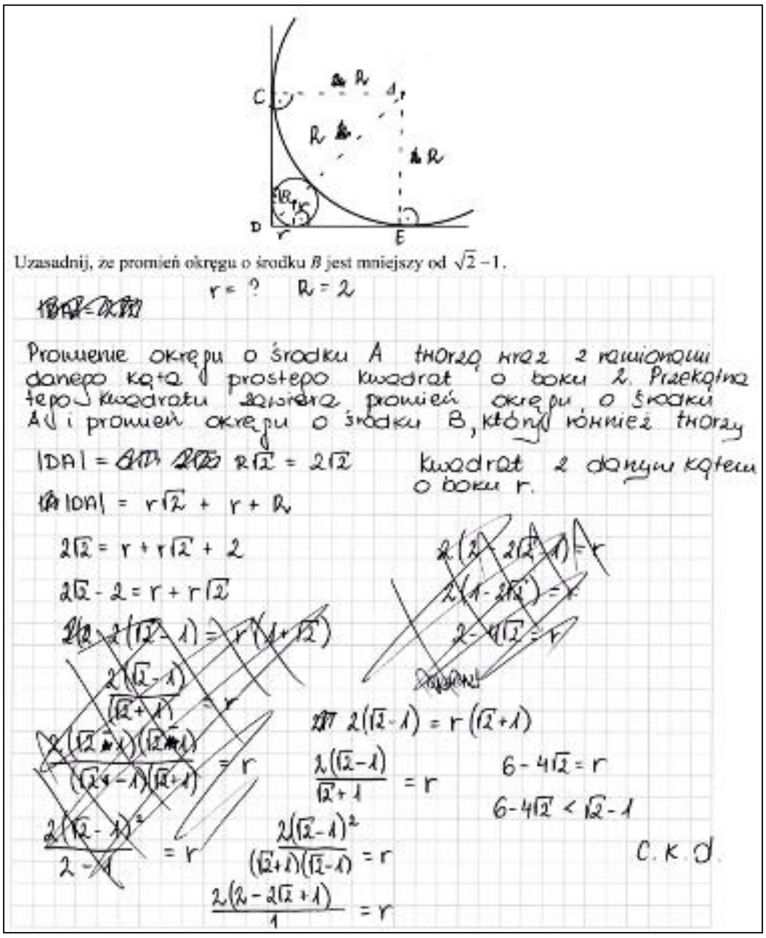
dodatkowo uzmysłowić konieczność rzetelnej analizy postępowania w przypadku stosowania przybliżeń dziesiętnych do szacowania wartości wyrażeń.
Podkreślić należy, że w zadaniach, w których należy przeprowadzić uzasadnienie tezy, maksymalną liczbę punktów można otrzymać tylko za rozwiązanie, zawierające pełne uzasadnienie. Oznacza to w szczególności, że w zadaniu 29. dwa punkty za rozwiązanie były przyznawane jedynie zdającym, którzy przedstawili w pełni poprawne rozumowanie wykazywanej prawidłowości.

Część zdających przedstawiła niepełne rozwiązanie zadania, najczęściej przerywając rozumowanie na etapie przekształcania nierówności. Takie rozwiązanie nie pozwalało na przyznanie zdającym maksymalnej liczby punktów. W szczególności do uznania uzasadnienia za w pełni poprawne nie wystarczyło obliczenie promienia mniejszego okręgu i zapisanie nierówności

$$6-4\sqrt{2}<\sqrt{2}-1,$$

jak zrobił to zdający w poniższym przykładzie 5.

Przykład 5.




Za takie rozwiązanie można było otrzymać tylko 1 punkt.
Zadanie 28. było kolejnym, które sprawiło tegorocznym maturzystom najwięcej kłopotów. Poziom wykonania tego zadania (21%) był tylko o jeden punkt procentowy wyższy niż w przypadku omówionego powyżej zadania 29. Maturzyści zmierzyli się w tym zadaniu z dowodem nierówności $\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}$, której prawdziwość należało uzasadnić dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$.
Najczęściej stosowanym sposobem dowodzenia było równoważne przekształcanie tezy twierdzenia, mimo że wielu maturzystów tego w swoich rozwiązaniach nie zapisywało. Poniżej (przykład 6.) poprawne rozwiązanie zdającego, który swoje uzasadnienie formułuje nadzwyczaj świadomie.

Przykład 6.

Założenia: $a, b > 0$

Teza: $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geqslant \frac{2}{a+b}$

Dowód: Przekształcam równoważnie tezę:

$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geqslant \frac{2}{a+b} \quad / \cdot ab$ (można, bo $a, b > 0$, więc $ab > 0$)

$\Updownarrow$

$\frac{ab}{2a} + \frac{ab}{2b} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$

$\Updownarrow$

$\frac{b+a}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \quad / \cdot (a+b)$ (można, bo $a, b > 0$, więc $a+b > 0$)

$\Updownarrow$

$\frac{(a+b)^2}{2} \geqslant 2ab$

$\Updownarrow$

$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - \frac{4ab}{2} \geqslant 0$

$\Updownarrow$

$\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} \geqslant 0$

$\Updownarrow$

$\frac{(a-b)^2}{2} \geqslant 0$

Kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, a liczba nieujemna podzielona przez liczbę dodatnią zawsze daje wynik nieujemny.

\#

Analizując rozwiązania błędne, zaprezentowane przez maturzystów, można było dostrzec takie, w których błąd powstawał już na etapie dodawania ułamków (jak w przykładzie 7.). Powodowało to na ogół istotne uproszczenie problemu.

Przykład 7.

$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geqslant \frac{2}{a+b}$ $\qquad a, b > 0$

$\frac{2b}{2a \cdot 2b} + \frac{2a}{2a \cdot 2b} \geqslant \frac{2}{a+b}$

$\frac{2a + 2b}{2ab} \geqslant \frac{2}{a+b}$ $\qquad a, b \neq 0$, $a + b \neq 0$

$2(a+b) \cdot (a+b) \geqslant 4ab$

$2(a+b)^2 \geqslant 4ab$

$2(a^2 + 2ab + b^2) \geqslant 4ab$

$2a^2 + 4ab + 2b^2 \geqslant 4ab$

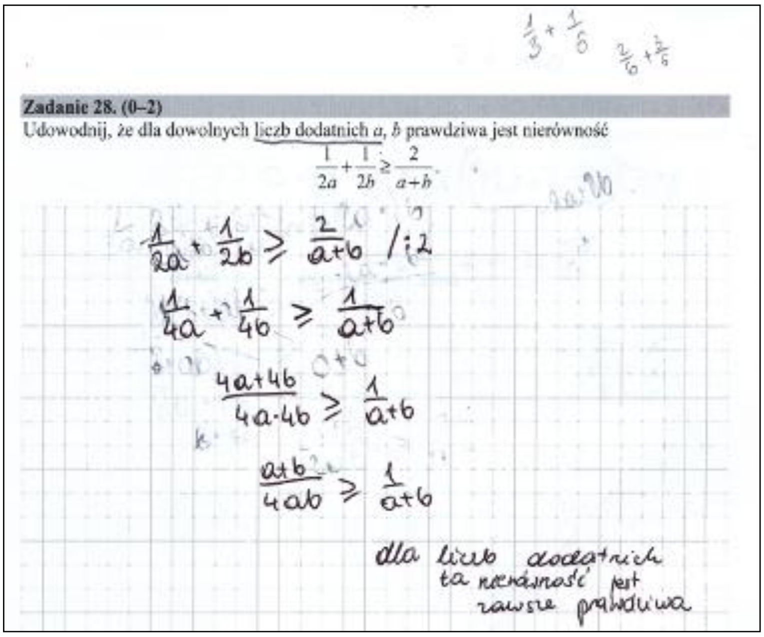
$2a^2 + 2b^2 \geqslant 0$

suma potęgowanych liczb zawsze jest wyższa od 0

Błąd popełniony przez zdającego w trzecim wierszu rozwiązania doprowadził do sytuacji, w której zrealizował on dowód omijający konieczność sprowadzenia lewej strony nierówności do kwadratu różnicy dwóch wyrażeń, co było istotą dowodu wyjściowego twierdzenia.

Tymczasem zdający zamieszczali w arkuszach egzaminacyjnych takie rozwiązania, w których rozumowanie urywa się po dwóch, trzech przekształceniach tezy, jak w poniższym przykładzie 8.

Przykład 8.



$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$

**Zadanie 28. (0–2)**
Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\ge\frac{2}{a+b}.$$

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geqslant\frac{2}{a+b}\quad /:2$$

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\geqslant\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{4a+4b}{4a\cdot4b}\geqslant\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{4ab}\geqslant\frac{1}{a+b}$$

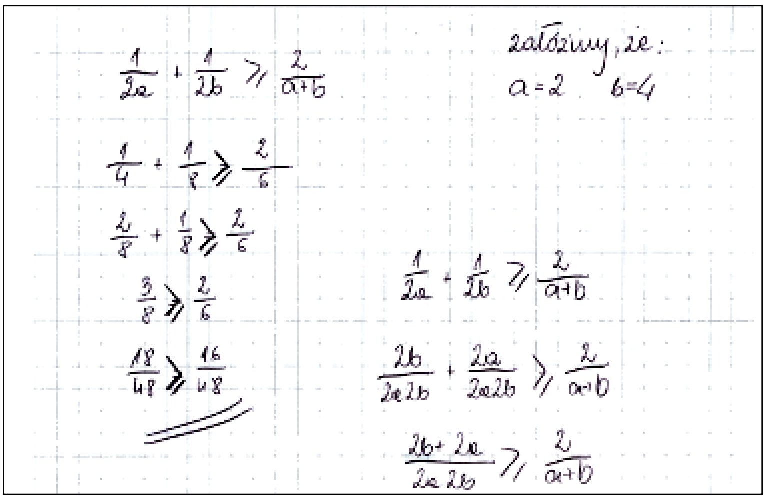
dla liczb dodatnich ta nierówność jest zawsze prawdziwa

Wnioskowanie o słuszności tezy z nierówności, której prawdziwość wcale nie jest bardziej oczywista niż poprawność wyjściowej nierówności, nie może przynieść satysfakcjonującego wyniku na egzaminie.

W poniższym przykładzie 9. można zauważyć, oprócz zapisania nierówności w postaci niewygodnej do wnioskowania, jeszcze niewłaściwą czynność, którą wielu zdających wykonywało bezrefleksyjnie: sprawdzanie poprawności nierówności jedynie dla wybranych wartości. Takie próby rozwiązania są o tyle zaskakujące, że co roku w schematach punktowania na stronach internetowych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej zamieszczana jest uwaga o zerowaniu rozwiązań, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla konkretnych wartości.

Niestety, na egzaminie pojawiło się wiele prac, w których takie sprawdzenie prawidłowości dla wybranych pojedynczych liczb było jedyną aktywnością zdającego.

Przykład 9.



$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geqslant\frac{2}{a+b}$$

załóżmy, że: $a=2$ $\quad b=4$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\geqslant\frac{2}{6}$$

$$\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\geqslant\frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{8}\geqslant\frac{2}{6}$$

$$\frac{18}{48}\geqslant\frac{16}{48}$$

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geqslant\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{2b}{2a2b}+\frac{2a}{2a2b}\geqslant\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{2b+2a}{2a2b}\geqslant\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{ab} \geqslant \frac{2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{ab} \cdot \frac{a+b}{1} \geqslant 2$$

$$\frac{a^2+ab+ba+b^2}{ab} \geqslant 2$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{ab} \geqslant 2$$

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geqslant 2$$

Strona 16 z 26

MMA 1P

Zdający potrafili też, po przeprowadzeniu bezbłędnych przekształceń nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy, opatrzyć rozwiązanie niewłaściwym komentarzem lub niepoprawnym wnioskiem. Poniżej takie właśnie rozwiązanie (przykład 10.).

Przykład 10.

Założenie

$a, b > 0$

Teza

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geqslant \frac{2}{a+b}$$

D-d

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geqslant \frac{2}{a+b} \quad / \cdot (a+b)$$

$$\frac{a+b}{2a} + \frac{a+b}{2b} \geqslant 2 \quad / \cdot (2a \cdot 2b)$$

$$2b(a+b) + 2a(a+b) \geqslant 2 \cdot 2a \cdot 2b$$

$$2ab + 2b^2 + 2ab + 2a^2 \geqslant 2(4ab) \quad / : 2$$

$$b^2 + 2ab + a^2 \geqslant 4ab \quad / - 2ab$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \quad / - 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

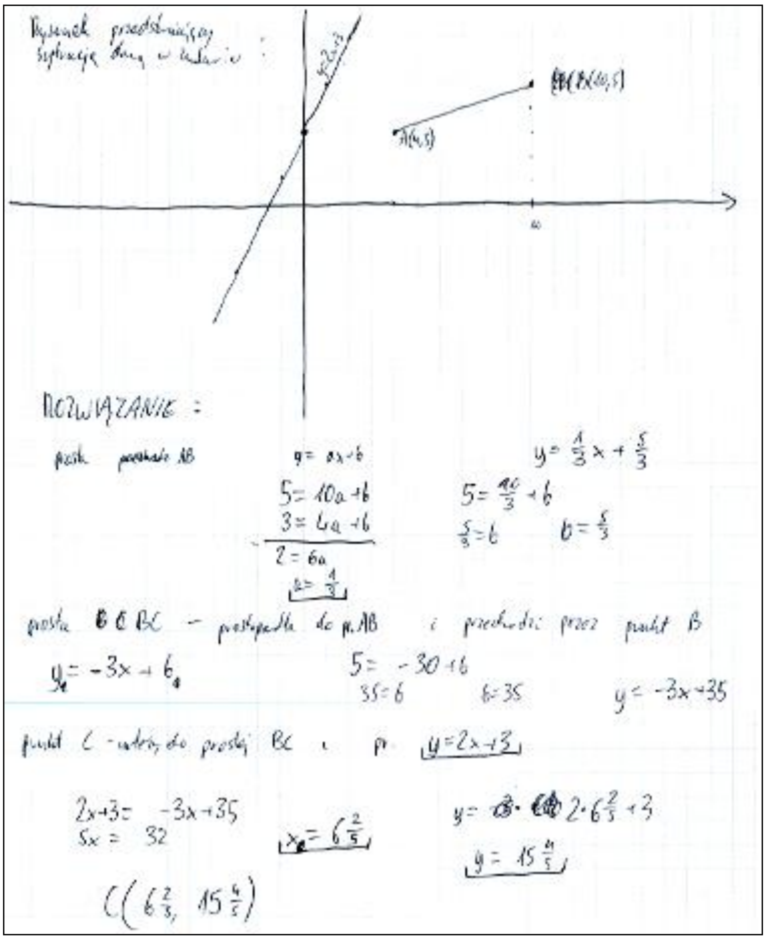
a kwadrat dowolnej liczby jest dodatni zawsze

cnd.

Po ciągu równoważnych przekształceń i doprowadzeniu nierówności do postaci, z której teza jest natychmiastowym wnioskiem, zdający zapisuje stwierdzenie niemające pokrycia w rzeczywistości matematycznej.

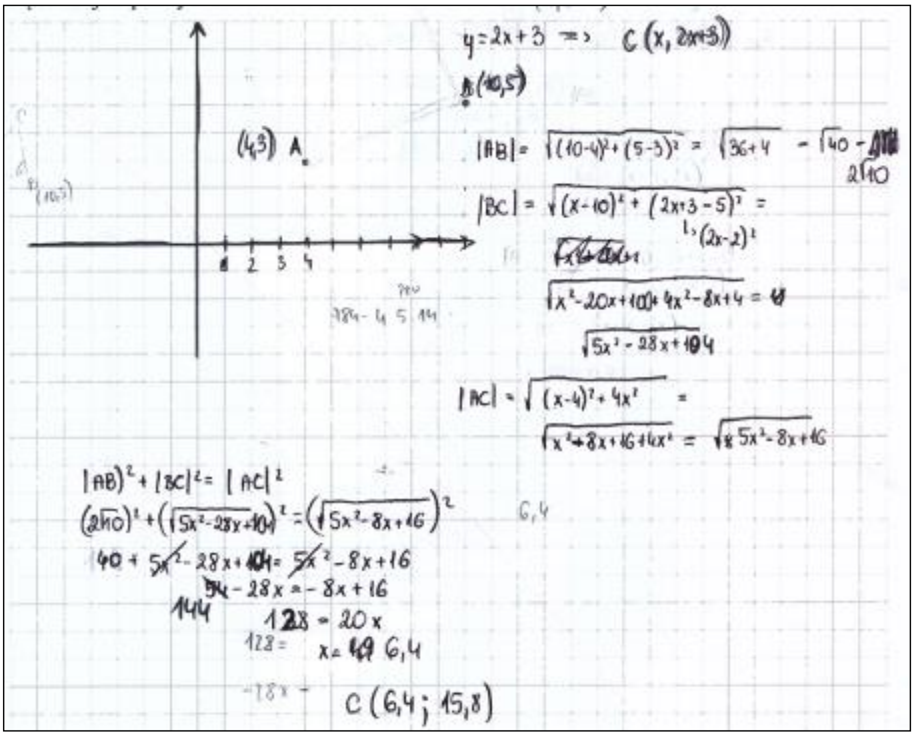
Oprócz dowodów w arkuszu egzaminacyjnym na poziomie podstawowym z tegorocznej majowej matury jeszcze jedno zadanie stanowiło poważne wyzwanie dla wielu zdających. To zadanie 32., ze stosunkowo niskim poziomem wykonania (29%). Poprawne rozwiązanie tego zadania nie wymagało wielu obliczeń i dawało się zapisać krótki sposobem. Świadczy o tym rozwiązanie z przykładu 11.

Przykład 11.




Równie szybko do celu prowadziło rozwiązanie z użyciem twierdzenia Pitagorasa (przykład 12.).

Przykład 12.

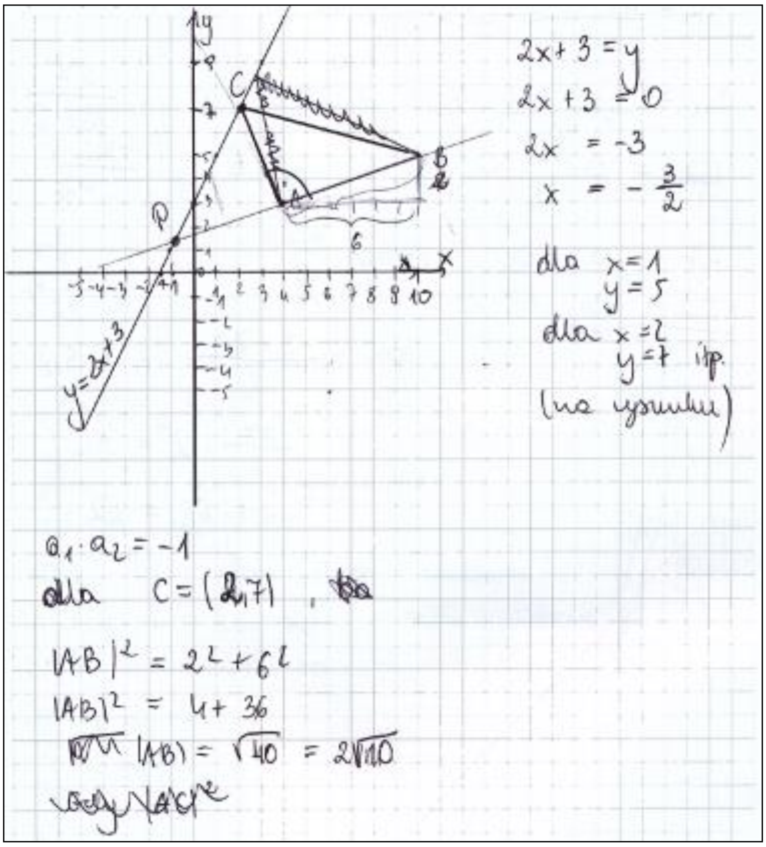


Gdzie zatem należy szukać źródeł niskiego wyniku w zadaniu, które nie należało do zadań szczególnie opuszczanych, jak każdy z dowodów w arkuszu, a strategia rozwiązania zadania dość jasno wynikała z jego treści. Oto możliwe odpowiedzi.

Część zdających, sporządzała tylko ilustrację graficzną do zadania – rysowali oni układ współrzędnych, zaznaczali punkty $A$ i $B$, czasem też prostą o równaniu $y = 2x + 3$. Inspiracją do takiego działania jest najczęściej przekonanie o możliwości uzyskania przy ocenie rozwiązania pojedynczego punktu za sam rysunek. Tymczasem w treści zadania nie wystąpiło polecenie „sporządź rysunek”. Zrobienie ilustracji zawierającej jedynie treść zadania w formie graficznej nie stanowi na tyle istotnego postępu w zadaniu, by przybliżać znacząco rozwiązanie.

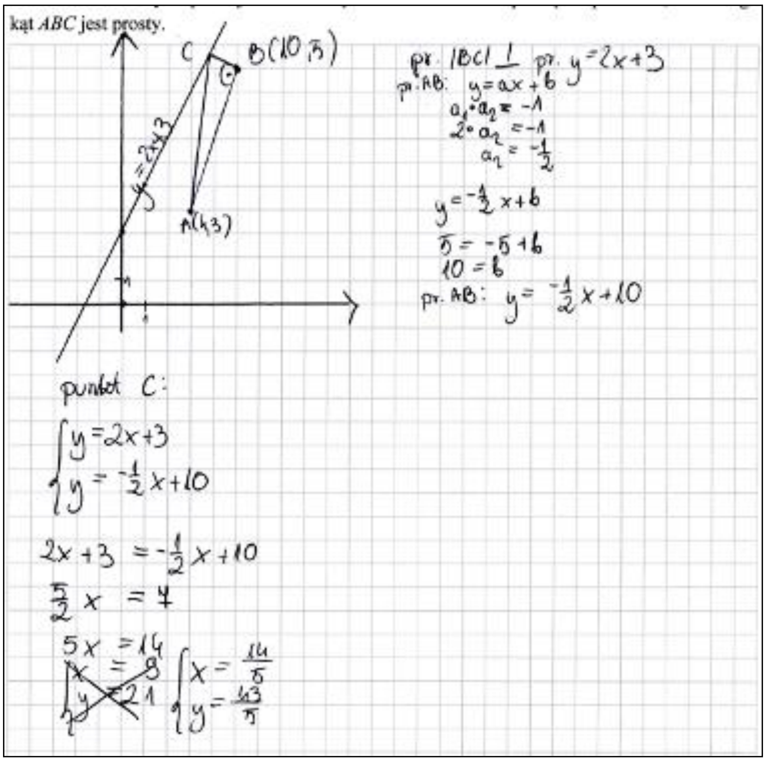
Inną grupę zdających stanowili ci, którzy po przeczytaniu treści zadania, nie rozpoznawali położenia kąta prostego w trójkącie *ABC*. Stąd na rysunkach prosta prostopadła do prostej *AB* czasem przechodziła przez punkt *A* (jak w przykładzie 13.).

Przykład 13.



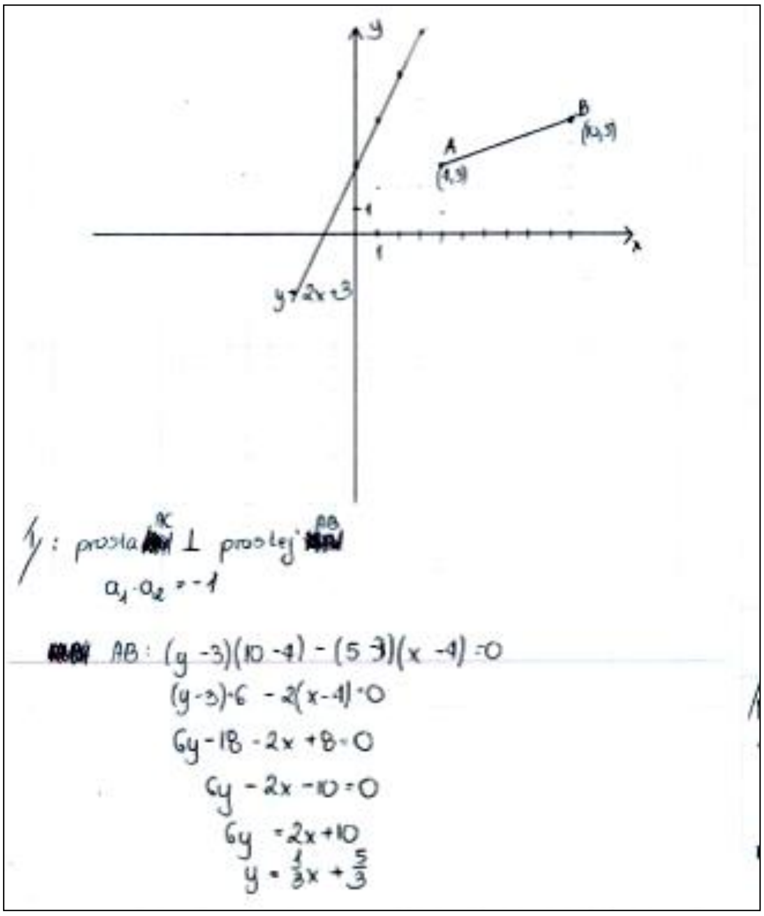

Zdarzało się też (jak w przykładzie 14.), że zdający prowadzili prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Jeśli jeszcze towarzyszyła temu zamiana miejscami współrzędnych punktu $B$, to ilustracja graficzna takiej sytuacji była całkowicie sugestywna dla zdających. Było to jednak rozwiązanie odległe od właściwego.

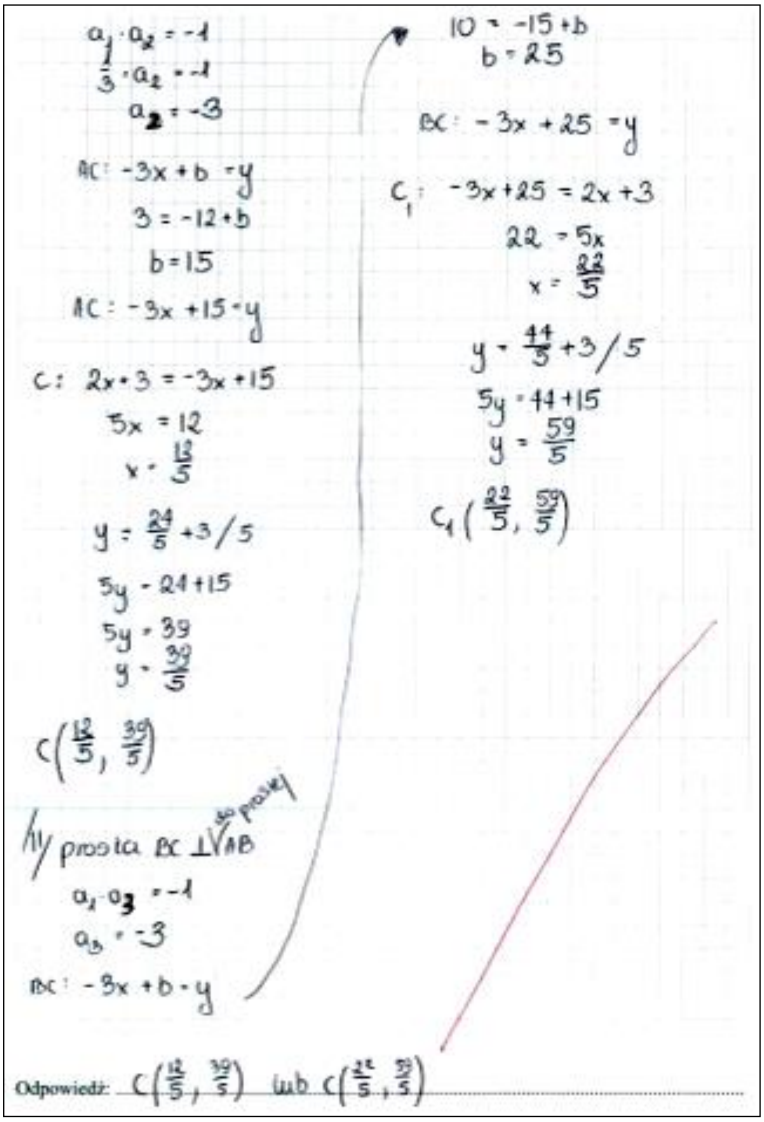
Przykład 14.




Jeszcze inną grupę stanowili zdający, którzy prowadzili proste prostopadłe do prostej *AB,* przechodzące przez punkty *A* oraz *B*, otrzymując dwa możliwe położenia punktu *C* (przykład 15.)

Przykład 15.





$a_1 \cdot a_2 = -1$

$\frac{1}{3} \cdot a_2 = -1$

$a_2 = -3$

$AC: -3x + b = y$

$3 = -12 + b$

$b = 15$

$AC: -3x + 15 = y$

$C: 2x + 3 = -3x + 15$

$5x = 12$

$x = \frac{12}{5}$

$y = \frac{24}{5} + 3 \,/5$

$5y = 24 + 15$

$5y = 39$

$y = \frac{39}{5}$

$C\left(\frac{12}{5}, \frac{39}{5}\right)$

b) prosta $BC \perp$ do prostej $AB$

$a_1 \cdot a_3 = -1$

$a_3 = -3$

$BC: -3x + b = y$

$10 = -15 + b$

$b = 25$

$BC: -3x + 25 = y$

$C_1: -3x + 25 = 2x + 3$

$22 = 5x$

$x = \frac{22}{5}$

$y = \frac{44}{5} + 3 \,/5$

$5y = 44 + 15$

$y = \frac{59}{5}$

$C_1\left(\frac{22}{5}, \frac{59}{5}\right)$

Odpowiedź: $C\left(\frac{12}{5}, \frac{39}{5}\right)$ lub $C\left(\frac{22}{5}, \frac{59}{5}\right)$

Takie rozwiązanie świadczy o braku zrozumienia treści zadania. Ze wszystkich przedstawionych błędnych rozwiązań wynika, że dla wielu maturzystów prawdziwym problemem jest brak zrozumienia sformułowania „kąt $ABC$ jest prosty”, a przecież jest to umiejętność kształcona już od szkoły podstawowej.

Na **poziomie rozszerzonym** najwięcej trudności tegoroczni maturzyści mieli z rozwiązaniem zadania 8., o czym świadczy niski poziom wykonania tego zadania – 4%. Zadanie to sprawdzało umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, a wymagało przeprowadzenia dowodu algebraicznego dotyczącego podzielności liczb.

W zależności od przyjętej strategii rozwiązania, zdający przekształcali wyrażenie opisujące podaną w treści zadania liczbę do różnych postaci. Zdecydowana większość maturzystów, którzy rozwiązali to zadanie wyłączając wspólny czynnik przed nawias zapisywała liczbę $k^3m - km^3$ w postaci $km(k+m)(k-m)$, a następnie uzasadniała podzielność tego iloczynu przez 6 poprzez analizę podzielności przez 2 i przez 3 poszczególnych jego czynników.

Takie rozwiązanie zilustrowano przykładem 16.

Przykład 16.

$km(k^2 - m^2) = (k-m)km(k+m)$

1) liczby k i m są parzyste lub nieparzyste

a) jeśli k jest parzysta, a m nie (i na odwrót) to ich iloczyn jest podzielny przez 2

b) jeśli zarówno k i m są parzyste, to i suma i iloczy jest podzielny przez 2

c) jeśli zarówno k i m są nieparzyste to ich różnica jest podzielna przez 2

2) a) jeżeli k lub m są podzielne przez 3, to cały iloczyn również

b) jeżeli ani k, ani m nie są podzielne przez 3, to:

I k dzieli się z resztą 1, a m dzieli się z resztą 2 (i wice wersa) to k+m jest podzielne przez 3

II k i m dzieli się z resztą 1 lub 2 (obie liczby jednocześnie) to ich różnica będzie podzielna przez 3.

∴ jeśli iloczyn $(k-m) \cdot km \cdot (k+m)$ jest podzielny jednocześnie przez 2 i 3, to jest też podzielny przez 6

Część zdających przekształcała liczbę $k^3m - km^3$ do postaci $km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$, i dostrzegając fakt, że $k(k-1)(k+1)$ i $m(m-1)(m+1)$ są iloczynami trzech kolejnych liczb całkowitych, uzasadniała podzielność liczby $k^3m - km^3$ w oparciu o twierdzenie mówiące o tym, że wśród trzech kolejnych liczb całkowitych występuje co najmniej jedna podzielna przez 2 i dokładnie jedna podzielna przez 3.

Oto przykład poprawnego rozwiązania z wykorzystaniem takiej strategii.

Przykład 17.

$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) =$
$= km(k^2 - 1 + 1 - m^2) =$
$= km(k^2 - 1) - km(m^2 - 1) =$
$= km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$

(1) $(k-1)\,k\,(k+1)$ } iloczyny trzech
(2) $(m-1)\,m\,(m+1)$ } kolejnych liczb całkowitych.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych zawsze jest co najmniej jedna podzielna przez 2 i dokładnie jedna podzielna przez 3.

Zatem iloczyny (1) i (2) są podzielne przez 2 i przez 3, czyli przez 6.

Różnica liczb podzielnych przez 6 jest też podzielna przez 6. ■

Duża grupa maturzystów nie podjęła próby rozwiązania tego zadania, a spośród tych, którzy próbowali wykazać tezę, wielu nie potrafiło poprawnie wykazać podzielności przez 2 i 3. Zdecydowanie łatwiejszym fragmentem rozwiązania dla zdających było wykazanie podzielności przez 2. Duża część maturzystów ten etap rozwiązania wykonywała poprawnie. Natomiast podzielność przez 3 zdający uzasadniali często na podstawie błędnych założeń, co widać w poniższych przykładach 18. i 19.

Przykład 18.

Zał: $k \in C$
$m \in C$

Teza: $6 \mid k^3m - km^3$

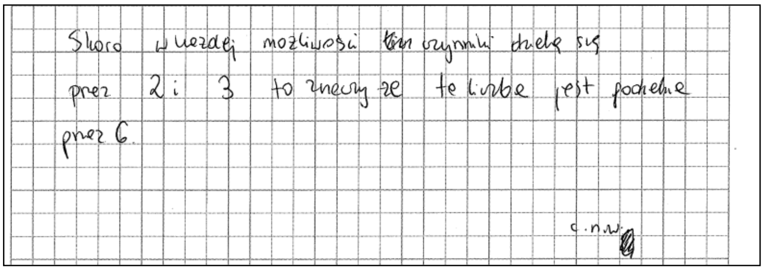
$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k-m)(k+m)$

Są 3 możliwości

- jeśli k będzie nieparzyste a m parzyste to km będzie parzyste czyli $2 \mid km$
- k-m i k+m będą nieparzyste, a ~~k~~ $3 \mid k-m$

- jeśli k i m będą parzyste to km będzie parzysty czyli $2 \mid km$
- k-m i k+m będą parzyste i $3 \mid k+m$

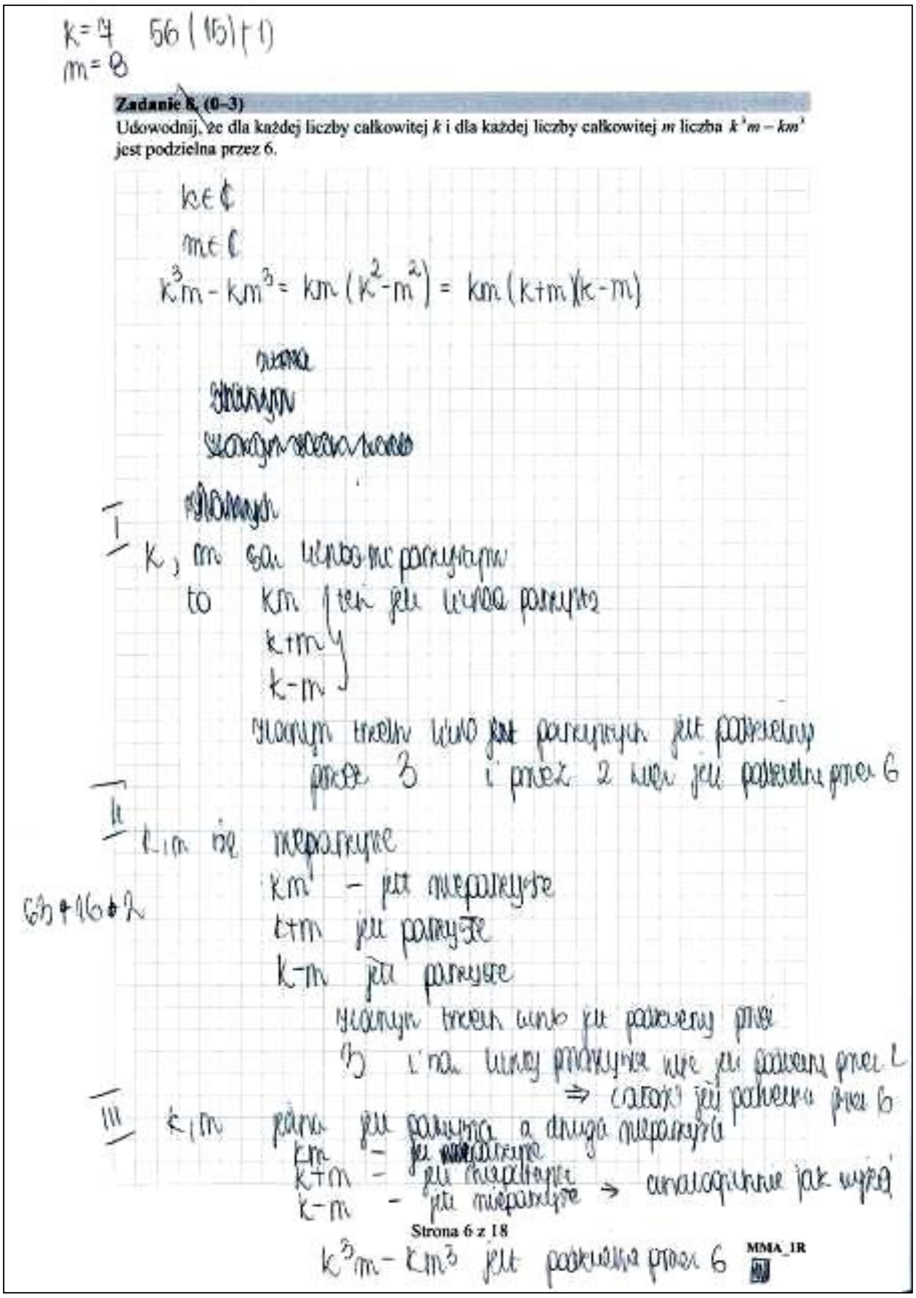
- jeśli k i m będą nieparzyste to ~~km~~ km jest np. dla $3 \mid km$
- ~~...~~ k-m parzyste, k+m parzyste



Skoro w każdej możliwości czynniki dzielą się przez 2 i 3 to znaczy że tę liczbę jest podzielna przez 6.

c.n.w.

Przykład 19.



$k=7$ $56(15)(-1)$
$m=8$

**Zadanie 8. (0–3)**
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $k$ i dla każdej liczby całkowitej $m$ liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

$k \in C$
$m \in C$
$k^3m - km^3 = km(k^2-m^2) = km(k+m)(k-m)$

I. $k, m$ są liczbami parzystymi to $km$, $k+m$, $k-m$ też jest liczbą parzystą
iloczyn trzech liczb parzystych jest podzielny przez 3 i przez 2 więc jest podzielny przez 6

II. $k, m$ są nieparzyste
$km$ – jest nieparzyste
$k+m$ jest parzyste
$k-m$ jest parzyste
$6b+16+2$
iloczyn trzech liczb jest podzielny przez 3 i na liczby parzyste więc jest podzielny przez 2 $\Rightarrow$ całość jest podzielna przez 6

III. $k, m$ jedna jest parzysta a druga nieparzysta
$km$ – jest parzyste
$k+m$ – jest nieparzyste
$k-m$ – jest nieparzyste $\rightarrow$ analogicznie jak wyżej

Strona 6 z 18 MMA_1R

$k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6

Wśród rozwiązań, zawierających jako pierwszy etap przekształcenie liczby $k^3m - km^3$ do postaci $km(k+m)(k-m)$, były takie, w których zdający błędnie przyjmowali, że czynniki iloczynu są kolejnymi liczbami całkowitymi (lub kolejnymi wyrazami ciągu), a zatem wśród nich jest dokładnie jedna podzielna przez 3 i co najmniej jedna podzielna przez 2.

Poniżej przykłady takich rozwiązań (przykłady 20. i 21.).

Przykład 20.

zał: $k \in C \wedge m \in C$

teza: $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6

dowód:

$k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k-m)(k+m) =$

$m(k-m)\cdot k \cdot (k+m)$ jest to iloczyn m i trzech kolejnych liczb całkowitych, z ~~których~~ zatem ta liczba jest podzielna przez 3, co więcej wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest chociaż jedna podzielna przez 2, a jeśli liczba jest podzielna jednocześnie przez 3 i przez 2 to jest także podzielna przez 6

c.n.d

Przykład 21.

zał: $k, m \in C$

teza: $k^3m - km^3 \mid 6$

D-d $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) =$

$km(k-m)(k+m)$

3 kolejne wyrazy ciągu

czyli liczba k jest całkowita i m jest całkowita (a wiemy to z założenia) to mnożąc przez siebie 3 kolejne wyrazy ciągu otrzymujemy liczbę podzielną przez 6

c.n.w

Niektórzy maturzyści próbowali uzasadniać tezę postawioną w zadaniu na podstawie wybranych, konkretnych wartości liczb *k* i *m* (przykłady 22. i 23.).

Przykład 22.

Teza: $6 \mid k^3m - km^3 \quad k \in C \quad m \in C$

$k^3m - km^3 = k(k^2m - m^3) = km(k^2 - m^2) = km(k-m)(k+m)$

$3 \cdot 4\,(3-4)(3+4) = 12 \cdot (-1) \cdot 7 = 84$

$1 \cdot 2\,(1-2)(1+2) = 2 \cdot (-1) \cdot 3) = -6$

Iloczyn iloczynu dwóch dowolnych liczb i różnicy tych liczb i sumy tych liczb jest zawsze podzielny przez 6.

c.n.w

[redacted]

Przykład 23.

Założenie: $k \in C \quad m \in C$

Teza: $6 \mid k^3m - km^3$

D-d: $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k-m)(k+m)$

$k = 1 \quad m = 3$
$k - m = -2$
$k + m = 4$
$km = 3$
$3 \cdot 4 \cdot (-2) = -24 \mid 6$

$k = 5 \quad m = 8$
$k - m = -3$
$k + m = 13$
$km = 40$
$-3 \cdot 13 \cdot 40 = -1560 \mid 6$

$k = 123 \quad m = 11$
$k - m = 112$
$k + m = 134$
$km = 1353$
$112 \cdot 134 \cdot 1353 = 20305824 \mid 6$

$k = -5 \quad m = -7$
$k - m = 2$
$k + m = -12$
$k \cdot m = 35$
$2 \cdot (-12) \cdot 35 = 840 \mid 6$

Podstawiając losowe liczby całkowite k i m do ~~wyrażeń~~ równania $k^3m - km^3$ zawsze wychodzi liczba podzielna przez 6.

c.n.w. [redacted]

Po analizie rozwiązań zadania 8. nasuwa się spostrzeżenie, że tegoroczni maturzyści nie potrafią właściwie wykorzystać znanych im twierdzeń, dotyczących podzielności liczb. W swych rozwiązaniach nie uwzględniali wszystkich możliwych przypadków lub powoływali się na twierdzenia, które przy ich metodzie rozwiązania nie miały zastosowania.

Bardzo trudnym zadaniem dla tegorocznych maturzystów, którzy przystąpili do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym, było również zadanie 14. (poziom wykonania zadania – 7%). Dotyczyło ono wymagań z obszaru *Użycie i tworzenie strategii*.
Aby rozwiązać zadanie, należało opracować strategię, która doprowadzi do wyznaczenia współrzędnych wierzchołków trójkąta. Poszczególne etapy rozwiązania wymagały od maturzystów umiejętności wyznaczania współrzędnych punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami tego trójkąta, obliczania współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych oraz wykorzystania współrzędnych środka odcinka do wyznaczenia współrzędnych końców tego odcinka.

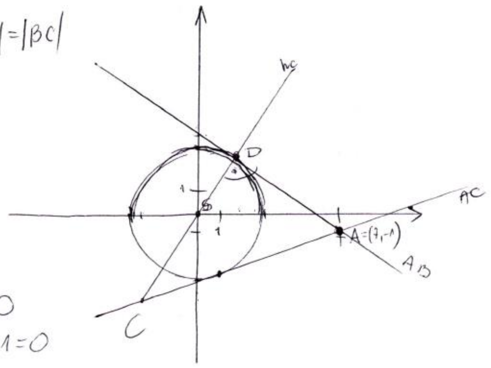
Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązanie zadania, w którym maturzysta wyznacza najpierw równania prostych *AB* i *AC*, korzystając z odległości punktu od prostej, a następnie znajduje współrzędne wierzchołka *C* jako rozwiązanie układu równań opisujących proste zawierające bok *AC* i wysokość opuszczoną z wierzchołka *C* na bok *AB*. Natomiast szukając współrzędnych wierzchołka *B*, zdający najpierw wyznaczył współrzędne środka odcinka *AB* jako punktu przecięcia prostej *AB* i prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka *C* na bok *AB*, by następnie wykorzystać je do obliczenia współrzędnych wierzchołka *B*.

Przykład 24.

$A=(7,-1)$ $|AC|=|BC|$

$S=(0,0)$

$r=\sqrt{10}$




$A \in AC$

$A \in AB$

$y=ax+b$

$y=a(x-7)-1$

$a(x-7)-y-1=0$

$ax-y-7a-1=0$

$$\frac{|a\cdot 0-1\cdot 0-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10} \quad /\cdot\sqrt{a^2+1}$$

$|-7a-1|=\sqrt{10}\sqrt{a^2+1} \quad /^2$

$(-7a-1)^2=10(a^2+1)$

$(7a+1)^2=10a^2+10$

$49a^2+14a+1-10a^2+10=0$

$39a^2+14a-9=0$

$\Delta=14^2-4\cdot 39\cdot(-9)=196+1404=1600$

$\sqrt{\Delta}=40$

$$a_1=\frac{-14-40}{2\cdot 39}=\frac{-\cancel{54}^{27}}{\cancel{2}\cdot 39}=-\frac{9}{13}$$

$$a_2=\frac{-14+40}{2\cdot 39}=\frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{2}\cdot 39}=\frac{1}{3}$$

$-1=-\frac{9}{13}\cdot 7+b_1$

$b_1=-1+\frac{63}{13}$

$b_1=\frac{50}{13}$

$-1=\frac{1}{3}\cdot 7+b_2$

$b_2=-1-\frac{7}{3}$

$b_2=-\frac{10}{3}$

$y_1=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13} \rightarrow AB$

$y_2=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3} \rightarrow AC$

Strona 14 z 18

$h_C \perp AB$

$a = -\frac{9}{13}$

$-\frac{9}{13} \cdot a_h = -1$

$a_{h_C} = \frac{13}{9}$

$y_{h_C} = \frac{13}{9}x$

$C: \begin{cases} y_C = \frac{13}{9}x_C \\ y_C = \frac{1}{3}x_C - \frac{10}{3} \end{cases}$

$\frac{13}{9}x_C = \frac{1}{3}x_C - \frac{10}{3}$

$\frac{13}{9}x_C - \frac{1}{3}x_C = -\frac{10}{3} \quad / \cdot 9$

$13x_C - 3x_C = -30$

$10x_C = -30 \quad / :10$

$x_C = -3$

$y_C = \frac{13}{9} \cdot (-3)$

$y_C = -\frac{13}{3}$

$C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$

$D: \begin{cases} y_D = \frac{13}{9}x_D \\ y_D = -\frac{9}{13}x_D + \frac{50}{13} \end{cases}$

$\frac{13}{9}x_D = -\frac{9}{13}x_D + \frac{50}{13}$

$\frac{13}{9}x_D + \frac{9}{13}x_D = \frac{50}{13}$

$\frac{169}{117}x_D + \frac{81}{117}x_D = \frac{50}{13}$

$\frac{250}{117}x_D = \frac{50}{13}$

$x_D = \frac{\cancel{50}^{1}}{13} \cdot \frac{117}{\cancel{250}_{5}}$

$x_D = \frac{\cancel{117}^{9}}{\cancel{13}_{1} \cdot 5}$

$x_D = \frac{9}{5}$

$y_D = \frac{13}{9} \cdot \frac{9}{5}$

$y_D = \frac{13}{5}$

$D = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$

$D = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$D = \left(\frac{7 + x_B}{2}, \frac{-1 + y_B}{2}\right)$

$\frac{7 + x_B}{2} = \frac{9}{5} \quad / \cdot 2$ $\qquad \frac{-1 + y_B}{2} = \frac{13}{5} \quad / \cdot 2$

$7 + x_B = \frac{18}{5}$ $\qquad -1 + y_B = \frac{26}{5}$

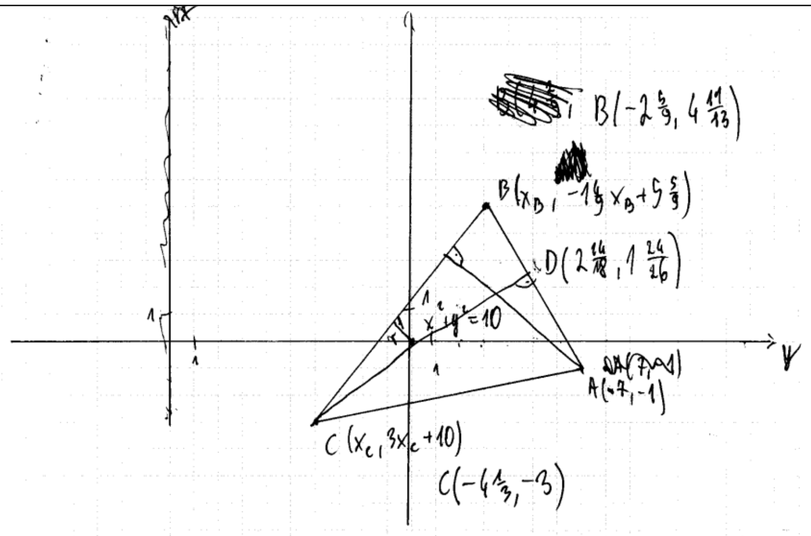
$x_B = -\frac{17}{5}$ $\qquad y_B = \frac{31}{5}$

$B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$

Odpowiedź: $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$, $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$

Części zdających, którzy poprawnie zaplanowali sposób rozwiązania zadania, w osiągnięciu pełnego sukcesu przeszkodziły braki w podstawowych umiejętnościach. Przykładem takiego rozwiązania jest to zamieszczone poniżej (przykład 25.), w którym zdający na początku popełnił błąd przy wyznaczaniu równania pęku prostych (zamienił współrzędną *x* z *y*) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązał zadanie do końca, ale popełniając jeszcze błędy rachunkowe (wynikające z braku umiejętności wykonywania działań na ułamkach o różnych mianownikach i liczbach mieszanych).

Przykład 25.




$P(0,0)$ $\quad Odl = \sqrt{10}$

$$\begin{cases} 7 = -1a + b \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + 1a = b \\ y = ax + 7 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + 1a = b \\ 0 = ax - y + 7 + a \end{cases}$$

$$\frac{|a\cdot 0 - 1\cdot 0 + 7 + a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$$

$$|7+a| = \sqrt{10(a^2+1)} \quad /()^2 \Rightarrow (7+a)^2 = 10(a^2+1)$$

$$\Rightarrow 49 + 14a + a^2 = 10a^2 + 10 \Rightarrow 0 = 9a^2 - 14a - 39$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{14^2 - 4\cdot 9\cdot -39} = \sqrt{196 + 1404} = 40$$

$a_1 = \frac{14-40}{18} = \frac{-26}{18} = \frac{-13}{9} = -1\frac{4}{9}$

$a_2 = \frac{14+40}{18} = 3$

$0 = -1\frac{4}{9}x - y + 7 - 1\frac{4}{9} \quad \vee \quad 0 = 3x - y + 7 + 3$

$y = -1\frac{4}{9}x + 5\frac{5}{9} \quad \vee \quad y = 3x + 10$

$h_c \perp y = -1\frac{4}{9}x + 5\frac{5}{9} \Rightarrow \{0 = \frac{9}{13}\cdot 0 + b \Rightarrow \{y = \frac{9}{13}x$

Punkt C to punkt przecięcia $h_c$ oraz $y = 3x+10$

$\frac{9}{13}x_c = 3x_c + 10 \Rightarrow -10 = 2\frac{4}{13}x_c \Rightarrow -10 = \frac{30}{13}x_c \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x_c = (-4\frac{1}{3})} \Rightarrow \underline{y_c = (-3)}$

$\frac{9}{13}x_D = -1\frac{4}{9}x_D + 5\frac{5}{9} \Rightarrow x_D = 2\frac{14}{18} \quad y_D = 1\frac{24}{26}$

$\vec{DA} = [4\frac{2}{9}, -2\frac{24}{26}]$

$B(2\frac{14}{18} - 4\frac{2}{9}, 1\frac{24}{26} + 2\frac{24}{26}) \Rightarrow \underline{B(-2\frac{5}{9}, 4\frac{11}{13})}$

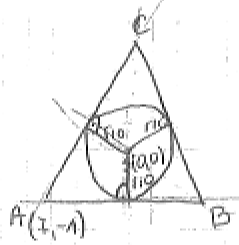
Odpowiedź: $C(-4\frac{1}{3}, -3) \quad B(-2\frac{5}{9}, 4\frac{11}{13})$

W rozwiązaniach zadania 14., proponowanych przez tegorocznych maturzystów w arkuszach egzaminacyjnych, pojawiały się błędy nie tylko rachunkowe – również takie, które wynikały z zastosowania pewnych własności i związków geometrycznych, występujących np. w trójkącie równobocznym, ale nie w trójkącie równoramiennym, który występował w treści zadania (przykłady 26. i 27. – dwusieczna kąta jako wysokość opuszczona na przeciwległy bok *BC*).

Przykład 26.

**Zadanie 14. (0–6)**

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka $C$ są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków $B$ i $C$ tego trójkąta.




O: $x^2+y^2=10$

$S(0,0)$ $r=\sqrt{10}$

$x_C, y_C < 0$

1. prosta AC $A(7,-1)$

$y=ax+b$ $-1=7a+b$

$b=-1-7a$

k: $y=ax-1-7a$ $ax-y-1-7a=0$

odległość AC od $S(0,0)=\sqrt{10}$

odległość prostej AB i AC od S to $\sqrt{10}$, więc wyjdą nam równanie prostych AB i AC

$d(k,S)=\sqrt{10}$ $S(0,0)$

$d(k,S)=\frac{|-1-7a|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10}$

$|-1-7a|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2+1}\ /^2$, bo obie strony są dodatnie

$1+14a+49a^2=10a^2+10$

$39a^2+14a-9=0$

$\Delta=196-4\cdot39\cdot(-9)=1600$

$\sqrt{\Delta}=40$

$a_1=\frac{-14+40}{78}=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{-14-40}{78}=\frac{-9}{13}$

~~$b_1=\frac{1}{3}\ \frac{7}{13}\ \frac{8}{3}$~~ $b_2=-1+\frac{63}{13}=\frac{-13}{13}\ \frac{50}{13}$

$b_1=-1-\frac{7}{13}=-\frac{3}{3}-\frac{7}{3}=\frac{-10}{3}$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$ ∨ m: $y=\frac{-9}{13}x+\frac{50}{13}$

równania prostych prostopadłych do $l$ i $m$ przechodzących przez punkt $(0,0)$

1° do $l$ $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$ 2° do $m$ $y=\frac{-9}{13}x+\frac{50}{13}$

$a=-3$ $a=\frac{13}{9}$

$y=-3x+b$ $y=\frac{13}{9}x+b$

$b=0$ $b=0$

$y=-3x$ $y=\frac{13}{9}x$

proste prostopadłe do boków AB i BC przechodzące przez środek okręgu wpisanego przechodzą też przez wierzchołki B i C, ponieważ środek okręgu wpisanego w trójkąt to miejsce przecięcia się dwusiecznych kątów przy wierzchołkach

$\frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{13}{9}x \;/\cdot 9$ ; $-\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} = -3x \;/\cdot(13)$

$3x - 30 = 13x$

$\cancel{6x = 43}$

$\cancel{x = 14\frac{1}{3}}$

$-30 = 10x$

to jest C, bo [illegible]
$\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{13}{9}\cdot(-3) = -\frac{13}{3} \end{cases}$

$C(-3; -\frac{13}{3})$

$-9x + 50 = -39x$

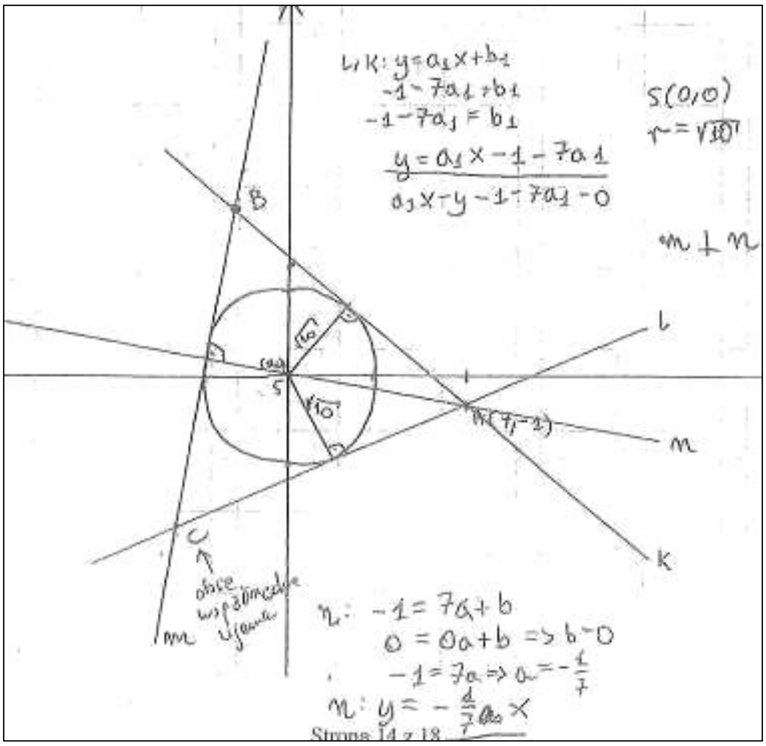
$30x = -50$

B $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -3\cdot(-\frac{5}{3}) = 5 \end{cases}$

$B(-\frac{5}{3}; 5)$

Odpowiedź: $B(-\frac{5}{3}; 5)$ $C(-3; -\frac{13}{3})$

Przykład 27.



$-1+7\cdot\frac{18}{13}=\frac{126}{13}-\frac{13}{13}=\frac{113}{13}$

$-1-7\cdot\frac{?}{3}=-\frac{17}{3}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{13}\cdot 39=$

$d(k,S)=r \Rightarrow \frac{|a_1\cdot 0-1\cdot 0-1-7a_1|}{\sqrt{a_1^2+1}}=\sqrt{10}$

$|+1+7a_1|=\sqrt{10(a_1^2+1)}\ /^2$, bo obie strony nieujemne

$1+14a_1+49a_1^2=10a_1^2+10 \Rightarrow 39a_1^2+14a_1-9=0$

$\Delta=196+4\cdot 9\cdot 39=196+1404=1600$

$\sqrt{\Delta}=40$

$a_1=\frac{-14+40}{2\cdot 39}=\frac{26}{2\cdot 39}=\frac{1}{3}$

$a_2=\frac{-14-40}{2\cdot 39}=-\frac{27}{39}=\frac{27}{39}=-\frac{9}{13}$

$l: y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$

$k: y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$

$m\perp n \Rightarrow a_m\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-1 \Rightarrow a_m=7$

$m: y=7x+b_m \ \wedge\ d(m,S)=r \Rightarrow \frac{|7\cdot 0-0\cdot 1+b_m|}{\sqrt{49+1}}=\sqrt{10}$

$7x-y+b_m=0$

$|b_m|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}=10\sqrt{5}$

$b_m=10\sqrt{5} \vee b_m=-10\sqrt{5}$

chodzi o prostą leżącą w II i III ćwiartce, czyli ten współczynnik właściwy

$\underline{m: y=7x+10\sqrt{5}}$ punkty B i C to przecięcie m z k i m z l (bo pamiętamy, że C ma dwie współrzędne ujemne)

B: $7x+10\sqrt{5}=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}\ /\cdot 13$

$91x+130\sqrt{5}=-9x+50$

$100x=50-130\sqrt{5} \Rightarrow x_B=\frac{5-13\sqrt{5}}{10}$ $\quad y_B=\frac{35+9\sqrt{5}}{10}$

C: $7x+10\sqrt{5}=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}\ /\cdot 3$

$21x+30\sqrt{5}=x-10$

$20x=-10-30\sqrt{5} \Rightarrow x_C=\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}$ $\quad y_C=\frac{-7-\sqrt{5}}{2}$

Odpowiedź: $B\left(\frac{5-13\sqrt{5}}{10},\frac{35+9\sqrt{5}}{10}\right), C\left(\frac{-1-3\sqrt{5}}{2},\frac{-7-\sqrt{5}}{2}\right)$

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 14. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 6 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

$\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{13}\cdot 39=36$

$-1-\frac{7}{3}=-\frac{7}{3}-\frac{3}{3}$

$-\frac{9}{13}\cdot 7-\frac{13}{13}=\frac{-63-13}{13}$

$-76$

$\frac{7\cdot 9}{13}-\frac{13}{13}=\frac{56}{13}$



Niektórzy maturzyści przeprowadzali analizę treści zadania, zapisywali dostrzeżone związki i zależności, ale nie potrafili ich odpowiednio połączyć, by osiągnąć choćby niewielki postęp na drodze do rozwiązania zadania. Przykład 28. stanowi takie właśnie rozwiązanie.

Przykład 28.

$A = (7, -1)$

$\Delta ABC$ – równoramienny

$|AC| = |BC|$

współrzędne C są ujemne $\Rightarrow$ $C \in$ III ćw.

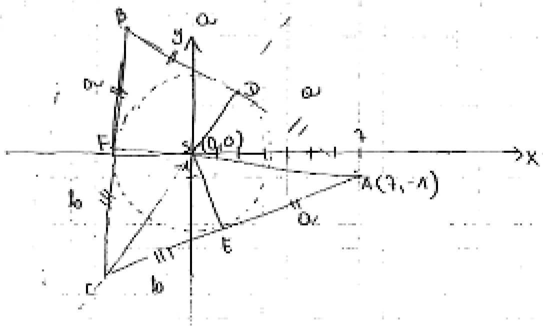
o: $x^2+y^2=10$ ← okrąg wpisany w $\Delta ABC$

$S=(0,0)$

$r = \sqrt{10} \approx 3,2$

$B(x_B, y_B) = ?$

$C(x_C, y_C) = ?$




Środek okręgu wpisanego w $\Delta$ leży na przecięciu dwusiecznych.

$|CA| = |CB| \Leftrightarrow |CA|^2 = |CB|^2$

$(x_C-7)^2 + (y_C+1)^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

$|DB| = |DA|$

$D\left(\frac{x_B+7}{2}, \frac{y_B-1}{2}\right)$

$|DS|^2 = 10 = \left(\frac{x_B+7}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B-1}{2}\right)^2$

$\frac{x_B^2+14x_B+49}{4} + \frac{y_B^2-2y_B+1}{4} = 10$

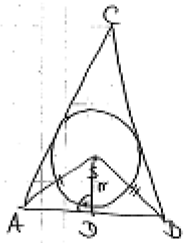
$P_\Delta = \frac{1}{2}\left|(x_B-7)(y_C+1) - (y_B+1)(x_C-7)\right|$

Zauważmy, że $\begin{cases} |CF| = |CE| \\ |EA| = |AD| \\ |DB| = |FB| \\ |CA| = |CB| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AE| = |AD| = |BD| = |BF| \\ |CF| = |CE| \end{cases}$ ← tw. o stycznych do okręgu

tw. Pitagorasa dla $\Delta CDB$:

$|CD|^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2$

D – obraz wierzchołka A względem prostej CD




$|AS| = |SB|$

$\sqrt{49+1} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$

$\boxed{50 = x_B^2 + y_B^2}$

$\left|\frac{1}{2}AB\right|^2 + r^2 = |AS|^2$

$\frac{1}{4}(x_B-7)^2 + \frac{1}{4}(y_B-1)^2 + 10 = 50$

$x_B^2 - 14x_B + 49 + y_B - 2y_B + 1 = 160$

Analiza rozwiązań zadań maturalnych pozwala zauważyć, że maturzyści lepiej radzą sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm (model działania), niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania czy uzasadnieniem postawionej tezy. Po raz kolejny daje się również zauważyć, że dla przystępujących do egzaminu maturalnego absolwentów szkół ponadgimnazjalnych duży problem stanowią zadania dotyczące zagadnień geometrycznych, zarówno w przypadku geometrii płaszczyzny, jak i geometrii przestrzeni.

## 2. Problem „pod lupą”

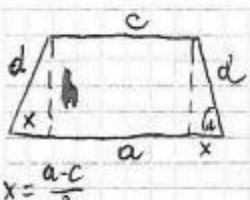
*Zadanie optymalizacyjne – zagadnienie wymagające rozwiązania wieloetapowego*

Zadanie optymalizacyjne, badające umiejętność modelowania matematycznego z wykorzystaniem rachunku różniczkowego, funkcjonuje w arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu rozszerzonego od początku istnienia nowej formuły egzaminu, tj. od roku 2015. W poprawnym rozwiązaniu takiego zadania występują stałe elementy: określenie – najczęściej przez opis wzorem funkcji – konkretnego modelu matematycznego rozważanej sytuacji, uwzględnienie ograniczeń i zastrzeżeń wynikających z uwarunkowań geometrycznych lub algebraicznych – na przykład przez wyznaczenie dziedziny funkcji, zastosowanie rachunku różniczkowego do wyznaczenia wartości ekstremalnych przyjmowanych przez funkcję, ustalenie wartości największych lub najmniejszych z uwzględnieniem dziedziny badanej funkcji.

Zadania te dotyczą zawsze badania sytuacji, w której występuje możliwość zmiany wartości lub rozmiarów pewnego obiektu. Na tegorocznym egzaminie przedmiotem rozważań było poszukiwanie opisanego na okręgu trapezu o najmniejszym możliwym obwodzie. Zdający mieli ustalić zakres wartości liczbowych dla dłuższej podstawy trapezu, przy których zadany trapez opisany na okręgu istnieje, uzasadnić wzór opisujący zależność obwodu trapezu od dłuższej podstawy trapezu, wyznaczyć tangens kąta ostrego trapezu z najmniejszym możliwym obwodem. Zatem do poprawnego rozwiązania wystarczyło konsekwentnie zrealizować strategię, uwzględniającą typowe etapy rozwiązania zadania optymalizacyjnego.

Oto poprawne rozwiązanie zadania (przykład 29.). Zdający w pierwszej kolejności rozważył właściwe geometryczne uwarunkowania i wyznaczył zakres wartości, które mogą być przyjmowane jako dłuższa podstawa trapezu. Następnie wykorzystał własność trapezu opisanego na okręgu i wyznaczył zależność obwodu trapezu od jego dłuższej podstawy. Na koniec wykorzystał rachunek różniczkowy do wyznaczenia wartości ekstremalnych, ustalił wartość zmiennej, przy której funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, i wyznaczył tangens właściwego kąta.

Przykład 29.




$x = \frac{a-c}{2}$

$a+h=2 \Leftrightarrow h=2-a$

$a+c=2d \Leftrightarrow d=\frac{a+c}{2}$

$h^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=d^2$

$L=a+c+2d, \quad L=2(a+c)$

a) $4-4a+a^2=-\frac{a^2-2ac+c^2}{4}+\frac{a^2+2ac+c^2}{4}$

$4-4a+a^2=\cancel{\frac{a^2+c^2}{4}}+\frac{2ac}{4}-\cancel{\frac{a^2+c^2}{4}}+\frac{2ac}{4}$

$4a^2-16a+16-4ac=0$

$a^2-4a+4-ac=0$

$a^2-(4+c)a+4=0$

$\frac{a^2+4}{a}=4+c$

$c=\frac{a^2+4}{a}-4$

$c>0$

$a>\frac{a^2+4}{a}-4$

$a^2>a^2-4a+4$

$0>-4+4a$

$4a>4$

$\frac{a^2+4}{a}>4$

$a<2$

$\Rightarrow a\in(1,2)$

$a>1$

b) $L=2(a+c)=\left(a+\frac{a^2+4}{a}-4\right)\cdot 2$, bo $c=\frac{a^2+4}{a}-4$

$L(a)=\left(\frac{2a^2-4a+4}{a}\right)2=\frac{4a^2-8a+8}{a}$ $\square$

c) $L(a)=\frac{4(a^2-2a+2)}{a}$

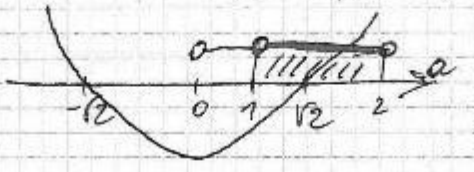
$L'(a)=\frac{(8a-8)a-(4a^2-8a+8)\cdot 1}{a^2}=\frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2}=$

$=\frac{4a^2-8}{a^2}$, $D=(1,2)$

$L'(a)=0 \iff 4a^2-8=0$

$4(a^2-2)=0$

$4(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$



wykres licznika pochodnej

$a^2>0$, a

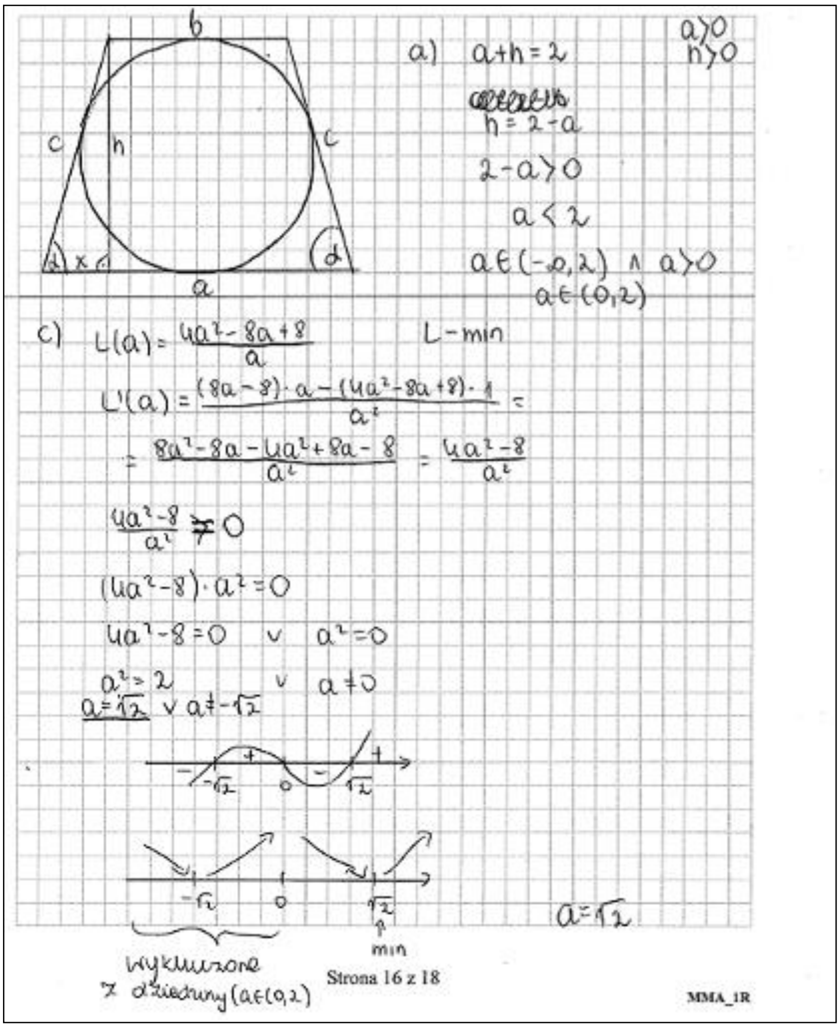
trzeci dodatni w $(-\infty,\sqrt{2})$ i $(\sqrt{2},\infty)$, ujemny w $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, ale $D=(1,2)$, więc funkcja $L(a)$ na rozważanej dziedzinie jedno ekstremum lokalne w $a=\sqrt{2}$, jest to zarazem minimum globalne, zatem gdy $a=\sqrt{2}$, $c=\frac{2+4}{\sqrt{2}}-4=$ $=\frac{6\sqrt{2}}{2}-4=3\sqrt{2}-4$, wtedy $h=2-\sqrt{2}$, a $x=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4}{2}$ $\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$, zatem $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{x}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1$

Odpowiedź: $a\in(1,2)$, $\operatorname{tg}\alpha=1$ ← dla tego tangensa był obwód jest najmniejszy.

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 15. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 7 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

Poziom wykonania zadania optymalizacyjnego z arkusza maturalnego z maja 2018 r. to zaledwie 14%. W dużym stopniu na taki wynik wpłynął fakt opuszczenia zadania przez wysoki odsetek zdających. Kolejna duża grupa zdających była w stanie rozwiązać tylko jeden z etapów zadania. Przykładem może być rozwiązanie prezentowane poniżej (przykład 30.). W przedstawionej sytuacji zdający koncentruje się na tej części rozwiązania, w której może wykazać się jedynie znajomością rachunku różniczkowego i zastosowaniem pochodnych do wyznaczania wartości ekstremalnych funkcji. Wyznaczenie możliwych wartości dla argumentów funkcji, dla których analizowane zagadnienie ma sens nie zostało przeprowadzone poprawnie, a uzasadnienie wzoru funkcji opisującej model w rozwiązaniu nie pojawiło się. Zdający jest w stanie wykonać tylko ten etap rozwiązania, który wymaga umiejętności wyznaczania pochodnej funkcji i ustalenia własności pochodnej potrzebnych do wnioskowania o ekstremach funkcji.

Przykład 30.



a) $a+h=2$ $\quad a>0$, $h>0$

$h=2-a$

$2-a>0$

$a<2$

$a\in(-\infty,2) \wedge a>0$

$a\in(0,2)$

c) $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$ $\quad L-\min$

$L'(a)=\frac{(8a-8)\cdot a-(4a^2-8a+8)\cdot 1}{a^2}=$

$=\frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2}=\frac{4a^2-8}{a^2}$

$\frac{4a^2-8}{a^2}\neq 0$

$(4a^2-8)\cdot a^2=0$

$4a^2-8=0 \vee a^2=0$

$a^2=2 \vee a\neq 0$

$a=\sqrt{2} \vee a\neq-\sqrt{2}$

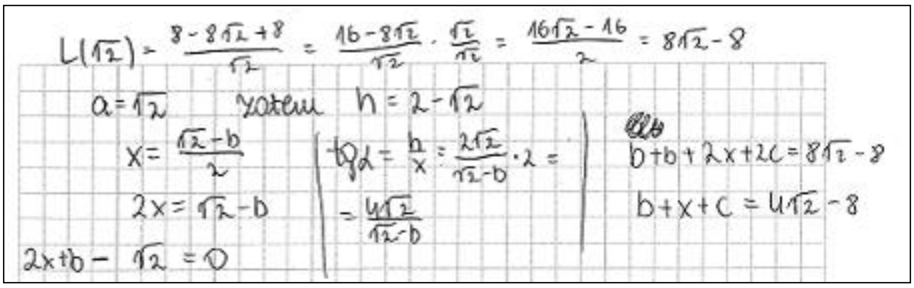
wykluczone z dziedziny $(a\in(0,2))$

min

$a=\sqrt{2}$

Strona 16 z 18

MMA_1R



$L(\sqrt{2})=\frac{8-8\sqrt{2}+8}{\sqrt{2}}=\frac{16-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}-16}{2}=8\sqrt{2}-8$

$a=\sqrt{2}$ zatem $h=2-\sqrt{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}-b}{2}$

$2x=\sqrt{2}-b$

$2x+b-\sqrt{2}=0$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{x}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-b}\cdot 2=$

$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-b}$

$b+b+2x+2c=8\sqrt{2}-8$

$b+x+c=4\sqrt{2}-8$

b) $L = a+b+2c$

$x = \frac{a-b}{2}$ $\quad h = 2-a$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2-a)^2 = c^2$

$c^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} + 4 - 4a + a^2$

Odpowiedź: a) $a \in (0,2)$

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 15. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 7 |
| | Uzyskana liczba pkt | 3 |

Wśród rozwiązań zadania optymalizacyjnego dominowały takie, w których zdający podawali błędną dziedzinę funkcji (przykład 31.) oraz rozwiązania bez poprawnego uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej badanej funkcji (przykład 32.).

Przykład 31.

$a+b = \frac{2a^2-4a+4}{a} = 2a - 4 + \frac{4}{a}$

$b = a - 4 + \frac{4}{a} = \frac{a^2-4a+4}{a}$

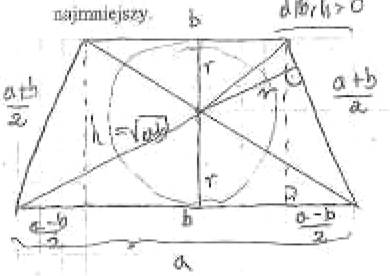
**Zadanie 15. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy $a$ i wysokości trapezu jest równa 2. $\quad ab > (a-2)^2$

a) Wyznacz wszystkie wartości $a$, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód $L$ takiego trapezu, jako funkcja długości $a$ dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.




z tw. Pitagorasa

$h^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$

$4h^2 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$4h^2 = 4ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$

$a + h = 2$

$a + \sqrt{ab} = 2 \rightarrow \sqrt{ab} = 2 - a > 0$

$\boxed{a < 2}$

a) D: $a \in (0,2)$

obw $= 2a + 2b = 2(a+b)$

$\sqrt{ab} = 2 - a \Rightarrow ab = 4 - 4a + a^2 \; /:a$

$b = \frac{a^2-4a+4}{a}$

b) obw $= 2a + 2b = 2a + \frac{2a^2-8a+8}{a} = \frac{4a^2-8a+8}{a}$ c.n.d.

$L(a)$

$L'(a) = \frac{(8a-8)a - 1(4a^2-8a+8)}{a^2} = \frac{8a^2-8a-4a^2+8a-8}{a^2}$

$L'(a) = \frac{4a^2-8}{a^2}$ $\quad$ D: $a \in (0,2)$

$a^2$ zawsze dodatnie

war. konieczny istnienia ekstremum funkcji

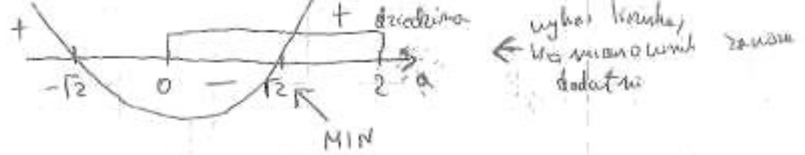
$L'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 2$

$a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$

$\notin D$

$\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4}{2}=2-\sqrt{2}$

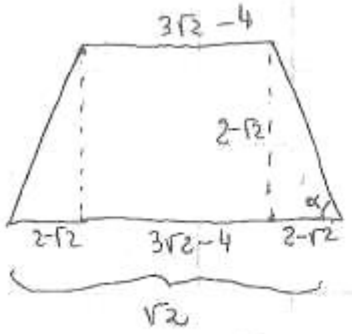
warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji:




$L(a)\uparrow$ dla $a\in(-\infty,-\sqrt{2})$
$L(a)\downarrow$ dla $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
$L(a)\uparrow$ dla $a\in(\sqrt{2},+\infty)$

stąd dla $a=\sqrt{2}$ $L(a)$ osiąga minimum

c)



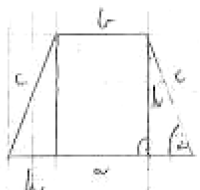

$b=\frac{2-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$b=\frac{6\sqrt{2}-8}{2}=\underline{3\sqrt{2}-4}$

$a+h=2$
$h=2-a=2-\sqrt{2}$

$tg\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\boxed{1}$

Przykład 32.




$a+b=2$
$b=2-a$


a) a jest dłuższą podstawą, gdy $b>a$, a b jest krótszą podstawą

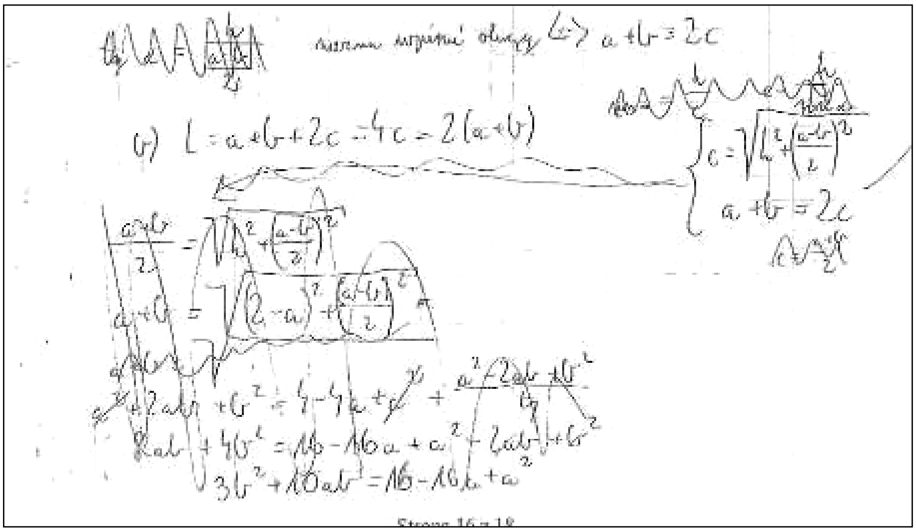
Warunek: $a\geq h \wedge h>0$

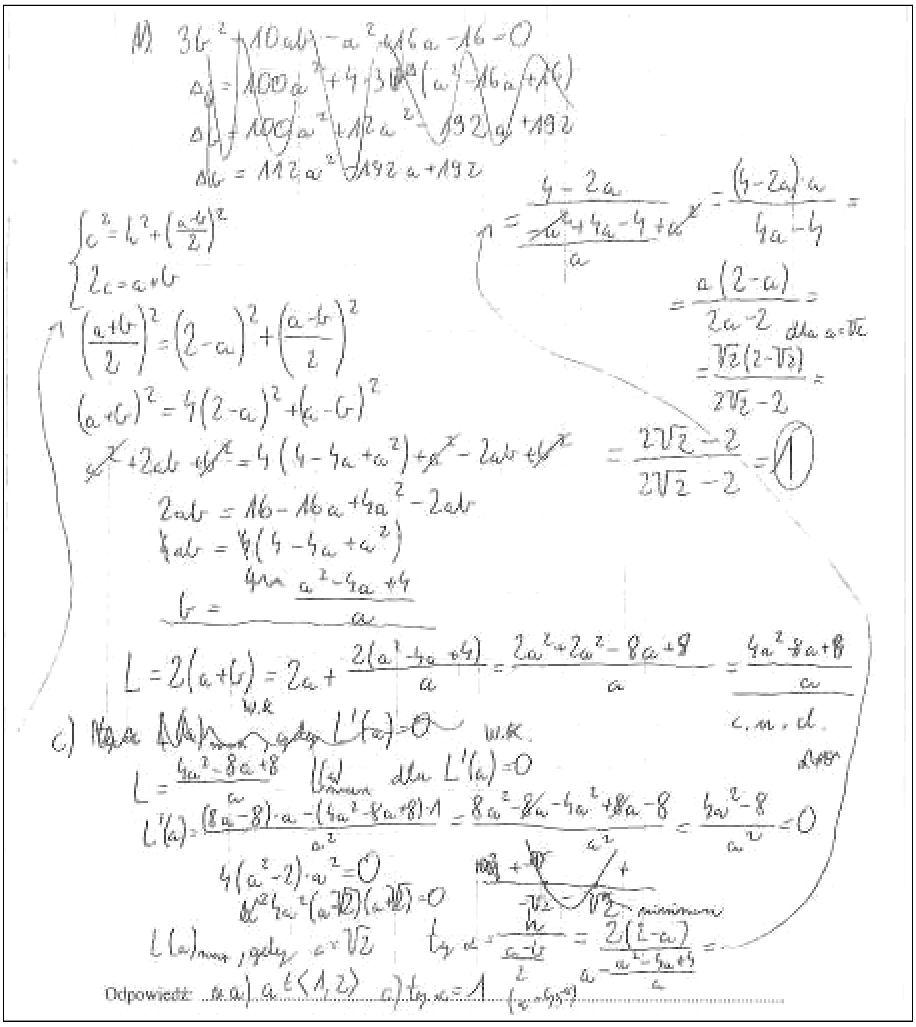
$h=2-a$ $\qquad a+h=2$
$a\geq 2-a$ $\qquad a<2$
$2a\geq 2$
$a\geq 1$ $\qquad a\in\langle 1,2)$

$tg\alpha\cdot b=tg\alpha\cdot a+2a-4$

$b=a+\frac{2a-4}{tg\alpha}$

$L=a+a+\frac{2a-4}{tg\alpha}+\frac{(2-a)}{\sin\alpha}=2a+\frac{\cos\alpha(2a-4)}{\sin\alpha}+\frac{(2-a)}{\sin\alpha}$





Powyższe przykłady wskazują na to, iż maturzyści niewłaściwie rozwiązywali zadania optymalizacyjne przy wykorzystaniu rachunku pochodnych. Powszechnym zjawiskiem jest brak zrozumienia istoty zagadnień optymalizacyjnych, a w szczególności konieczności rozważania geometrycznych i algebraicznych uwarunkowań przy określaniu modelu matematycznego, a także rozumienia właściwego zastosowania rachunku różniczkowego do badania własności funkcji.

Podkreślić należy, że materiały informacyjne dotyczące egzaminu maturalnego w formule obowiązującej od 2015 r. (tzw. „nowej” formule) od początku zawierały zapis o zamieszczaniu w każdym arkuszu maturalnym dla poziomu rozszerzonego zadania z zagadnieniem optymalizacyjnym. Problematyka, którą te zadania poruszają, wymaga wieloetapowej strategii rozwiązania. Stąd wysoka liczba punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie tego typu zadania, znacząco decydująca o wyniku całego egzaminu.

Zagadnienia optymalizacyjne są często traktowane przez uczniów i nauczycieli jako swoisty algorytm postępowania, którego stałe elementy (etapy) wymagają każdorazowo specyficznej realizacji ze względu na różnorodność badanych sytuacji. Odmienność kolejnych rozważanych zagadnień od wcześniej zbadanych w rozwiązanych już zadaniach decyduje o tym, że maturzyści uważają ten typ zadań za bardzo trudny.

Zagadnieniom optymalizacyjnym warto nadać w toku edukacji matematycznej większe znaczenie. Zwiększenie liczby przeanalizowanych różnorodnych przykładów może pozwolić na dogłębne zrozumienie istoty problemu, zwłaszcza w realizacji najbardziej kluczowych etapów rozwiązania – tj. wyznaczania dziedziny funkcji i uzasadniania istnienia wartości największej lub najmniejszej rozważanej funkcji.

## 3. Wnioski i rekomendacje

1. Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że maturzystom nie sprawiają trudności zadania sprawdzające pojedyncze, mało skomplikowane umiejętności.

2. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych: z rachunku prawdopodobieństwa za obliczenie prawdopodobieństwa w prostej sytuacji z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa, za wykonanie obliczeń procentowych oraz z ciągów liczbowych za wykorzystanie wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

3. Wysoki był również odsetek zdających, którzy potrafili badać równoległość prostych na podstawie ich równań kierunkowych oraz rozpoznawali niektóre własności funkcji kwadratowej na podstawie podanej postaci iloczynowej lub postaci ogólnej. Tym samym potwierdza się teza, że zdający osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach krótkich, wymagających jedynie zastosowania wzorów. Podobne wyniki uzyskali również zdający **na poziomie rozszerzonym** w zadaniach sprawdzających znajomość praw działań na logarytmach i potęgach o wykładniku wymiernym.

4. W przypadku zadań otwartych na poziomie rozszerzonym najwyższe wyniki zdający uzyskali za rozwiązanie zadania, w którym należało wykazać się umiejętnościami zastosowania własności ciągów liczbowych, a w szczególności stosowaniem wzoru na $n$-ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

5. Zarówno na poziomie podstawowym, jak i na poziomie rozszerzonym, egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu geometrii, zwłaszcza geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Dotyczy to głównie zadań rozszerzonej odpowiedzi, w których należy zaplanować strategię rozwiązania, łącząc w całość kilka pojedynczych umiejętności. Źródeł kłopotów zdających w takich zadaniach należy upatrywać już w umiejętności przeczytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji.

6. O niskim wyniku egzaminu z matematyki najczęściej decyduje brak sprawności rachunkowej, poważne problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych. Błędy rachunkowe w rozwiązaniach zadań otwartych są popełniane przez zdających praktycznie na każdym etapie rozwiązania, a te z nich, które dotyczą początkowej fazy rozwiązania zadania nierzadko utrudniają lub uniemożliwiają dokończenie rozwiązania albo doprowadzają do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. Najczęściej zdający w wyniku popełnianych błędów nie mają szansy rozstrzygać kwestii, które pozwoliłyby na sprawdzenie opanowania przez nich umiejętności potrzebnych do prawidłowego rozwiązania zadania. Brak odpowiedniej sprawności rachunkowej, nieznajomość praw i własności działań, nieuwaga prowadząca do błędów przy obliczeniach, także nieskomplikowanych, jest najczęstszą przyczyną niepowodzeń

zdających maturę z matematyki. Jest to szczególne widoczne w przypadku zadań wieloetapowych, wymagających dobrania strategii rozwiązania składającej się z kilku kroków.

7. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania tego typu są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania jest wielu wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości.

8. Niepowodzenia maturzystów często wynikają z braku umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Świadczą o tym nieudane próby podjęcia rozwiązania zadań, gdzie już w początkowej fazie poszukiwania strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od tych z treści zadań. Takie działanie nie pozwala na uzyskanie dobrego wyniku, w praktyce za rozwiązanie innego zadania niż zamieszczone w arkuszu egzaminacyjnym zdający nie może uzyskać punktów. W trakcie organizowanych zajęć nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumieniu opisanej sytuacji. Można ćwiczyć z uczniami zmianę sformułowania treści matematycznej na opis tego samego zagadnienia w innym ujęciu albo rozwiązywanie zadań, w których pozornie drobna zmiana w treści wymaga zastosowania rozumowania istotnie odmiennego.

9. Szczególnym problemem, utrudniającym maturzystom uzyskanie dobrego wyniku na egzaminie z matematyki, jest brak umiejętności rozwiązywania zadań, w których dane lub rozważane wielkości nie mają konkretnych wartości liczbowych. W części zadań albo dane oznaczone są literami albo rozwiązanie wymaga wprowadzenia oznaczeń literowych dla istotnych przy rozwiązywaniu zadania wielkości, np. długości odcinka lub pola figury płaskiej. Maturzyści nierzadko ograniczają rozwiązania zadań tego typu do próby podjęcia lub do rozważania wyłącznie wybranych wartości liczbowych (wybranych przypadków). Umiejętność uogólniania i określania zmienności własności obiektów matematycznych w zależności od przyjmowania różnych wartości liczbowych jest niezbędna do prowadzenia prawidłowego wnioskowania. Wspomniane umiejętności decydują wręcz o możliwości rozwiązania niektórych zadań. Na przykład przy rozważaniu zagadnień optymalizacyjnych konieczne jest ustalenie dziedziny badanej funkcji, wymagające rozważenia sytuacji skrajnych i pośrednich dla uwarunkowań geometrycznych lub algebraicznych. W trakcie edukacji uczniowie powinni mieć więcej okazji do ćwiczenia umiejętności analizowania tych zmian własności obiektów matematycznych, które są konsekwencją przyjmowania w badanych sytuacjach różnych możliwych wartości liczbowych.